Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

2015 Michaela Králová

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DISERTAČNÍ PRÁCE

Komparace žákovských strategií řešení slovních úloh

Comparison of Pupils´ Strategies of Solving Word Problems

Michaela Králová

Vedoucí práce:	Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Studijní program:	Pedagogika
Studijní obor:	Didaktika matematiky

2015

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma Komparace žákovských strategií řešení slovních úloh vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 30. 6. 2015

....

podpis

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému školiteli Prof. RNDr. Milanu Hejnému, CSc. za odborné vedení mé disertační práce, předání cenných rad, zájem, čas a trpělivost, s jakou se mi po celou dobu studia věnoval. Dále děkuji všem žákům, kteří se podíleli na jednotlivých experimentech a poskytli mi ten nejcennější materiál pro mou práci. Rovněž velmi děkuji své rodině za neustálou psychickou podporu, kterou mi poskytovali v průběhu vzniku této práce.

ABSTRAKT

Dizertační práce se zabývá potenciálem slovní úlohy a komparacemi žákovských řešitelských procesů u slovních úloh. Teoretická část vychází z vymezení pojmu „problém“, kde se čtenář stručně seznámí s náhledy základních psychologických směrů na tento pojem. Následuje užší vymezení matematického problému, zejména s důrazem na řešitelský proces, fáze a faktory ovlivňující jeho úspěšnost. Matematický problém je následně konkretizován do podoby slovní úlohy. Zabýváme se jejím potenciálem, a to jak diagnostickým, tak didaktickým. Seznamujeme čtenáře s úlohovou situací a jejím praktickým využitím ve výuce, vše ukazujeme na konkrétních příkladech a modifikacích. Vlastní výzkum, jehož data byla získávána akčním výzkumem, je tvořen analýzami žákovských řešení, zejména s důrazem na přítomnost chyby a moment jejího vzniku. Cílovou skupinu tvořili žáci prvního stupně běžných základních škol. Výsledky našeho výzkumu ukázaly výrazně vyšší řešitelskou úspěšnost u žáků vedených konstruktivistickými přístupy a zároveň vyvrátily některá tvrzení tradičních učitelů, zvláště o přínosu zápisu slovní úlohy, používání neznámých a aplikaci naučených algoritmů v procesu řešení.

KLÍČOVÁ SLOVA

problém, slovní úloha, úlohová situace, proces řešení, uchopení, strategie

ABSTRACT

Primary intention of this doctoral thesis is to examine the potential of mathematical word problems and comparison of various solving processes of mathematical word problems among pupils. The theoretical part of this thesis is based on definition of the term "problem" and shows how different basic psychological directions approach this concept. This is followed with narrower definition of mathematical problem with particular regards to solving process itself, its phases and factors affecting its success rate. Afterwards, the mathematical problem is put in concrete terms with mathematical word problem and its diagnostic and didactic potential is examined. Using real examples and modifications, this thesis shows concrete task situation and its practical use in teaching. The actual research processed data obtained as a result of active survey focused on analysis of solutions used by pupils, putting emphasis on occurrence and type of a mistake and the moment of its emergence. The target group was pupils of lower primary schools. This research showed significantly higher success rate of pupils lead by constructive approach. Also, it proved false certain beliefs held by some traditionalists especially about the importance of written mathematical word problems, usage of unknowns or using the routine solution algorithms in general.

KEYWORDS

problem, verbal task, task situation, solving process, grasping, strategy

Obsah

1 Úvod

Po ukončení Pedagogické fakulty UK jsem nastoupila jako učitelka prvního stupně do běžné základní školy v Praze 9, kde pracuji již pět let. Po nástupu do zaměstnání mi byla přidělena první třída o počtu dvaceti žáků, kterou jsem vedla kontinuálně tři roky. Během nich jsem se snažila ve výuce matematiky uplatňovat konstruktivistické přístupy, podporovat aktivitu žáků, motivovat je k formulování vlastních myšlenek a názorů, podněcovat k vzájemným diskusím. V závěru třetího ročníku se začala připravovat reorganizace tříd (z finančních důvodů) - tři paralelní třídy bylo nutné přeskupit pouze do dvou. Tento krok byl realizován spojením polovin žáků ze stávajících celků, čímž se mělo zabránit zachování dvou původních třídních kolektivů, ke kterým by se přiřadili zbývající žáci ze třetí paralelní třídy. Rozdělování neproběhlo na základě výkonnosti žáků. Stala jsem se třídní učitelkou jedné z těchto dvou nových tříd a zároveň mi byla přidělena výuka matematiky v celém ročníku (celkem tedy 61 žáků). Znamenalo to pro mne jedinečnou příležitost pozorovat odlišnosti v pracovních návycích žáků a srovnávat jejich řešitelské strategie. Má praxe mi přinesla různé okamžiky, ať už se jednalo o chvíle radosti z povedených hodin, nebo zklamání nad situacemi, které jsem neuměla vyřešit. Nejvíce otázek ve mně vyvolávaly slovní úlohy, proto jsem svou dizertační práci nakonec zaměřila právě na ně.

Za cíl práce jsem si stanovila komparaci řešitelských strategií slovních úloh žáků prvního stupně a jejich ovlivnitelnost konstruktivistickými přístupy. Abych mohla porozumět řešitelskému procesu žáků, bylo nutné se nejprve důkladně seznámit s anatomií úlohy. Přemýšlela jsem nad parametry způsobující obtížnost řešitelského procesu, místy vzniku možných překážek a nad jejich odstraňováním. Přínos očekáváme zejména po stránce praktické. Ukážeme didaktický a diagnostický potenciál slovní úlohy, který budeme ilustrovat na konkrétních příkladech. Srovnávání řešitelských procesů bude naplňováno jednotlivými experimenty realizovanými na žácích prvního stupně vyučovaných mnou (konstruktivistickými přístupy) a dále na žácích vedených tradičními přístupy. Práce poskytne široké množství ukázek jejich řešení doplněných o analýzy a didaktické komentáře.

Po úvodní části následuje teoretická kapitola, ve které se zabývám východisky a vymezením pojmů stěžejních pro můj výzkum. Vycházím z „problému“, na který jsem nahlížela z pohledu hlavních psychologických směrů. Následně jsem se zaměřila na proces řešení problému a jeho fázování. Pokračuji vymezením slovní úlohy a klíčových pojmů, rovněž je podrobněji analyzován řešitelský proces a jeho etapizace. Jelikož jsem realizovala akční výzkum, nedílnou součástí této kapitoly je jeho teoretické ukotvení.

V následující kapitole se věnuji metodologii výzkumu. Jsou zde stanoveny výzkumné otázky, pracovní hypotézy, popsána cílová skupina pro realizaci výzkumu, metody sběru dat a způsob jejich následné analýzy. Vzhledem k tomu, že jsem se zabývala slovní úlohou, bylo zcela zásadní pečlivě poznat její strukturu, didaktický i diagnostický potenciál, což je rovněž součástí této kapitoly.

Čtvrtá kapitola popisuje vlastní výzkum tvořený čtyřmi navazující experimenty, ve kterých jsem srovnávala řešitelské strategie žáků prvního stupně v jediné slovní úloze. Ta byla předložena žákům v několika třídách vedených odlišnými pedagogickými přístupy, což bylo zásadní pro zamýšlenou komparaci. Každý experiment obsahuje přípravu, ukázky a analýzy získaných artefaktů (žákovských řešení), závěr shrnující daný experiment a reflexi.

Souhrn veškerých zjištění tvoří pátou kapitolu, jejíž součástí je zhodnocení zajímavých jevů plynoucích z výzkumu a jejich možné praktické aplikace. Připojila jsem také svou osobní sebereflexi.

Práci doplňuje šest příloh, které obsahují souhrnné přehledy vytvořené na základě analýz žákovských řešení v jednotlivých třídách.

2 Teoretická východiska

Kapitola je rozdělena do pěti dílčích podkapitol. V první jsou stručně vymezeny pojmy „problém“ a „řešení problému“, druhá přibližuje pohledy vybraných psychologických směrů na tyto pojmy, konkrétně zde hovoříme o přístupu gestalt psychologie, behaviorismu, kognitivní psychologie a heuristiky. Ve třetí podkapitole se věnujeme již konkrétně matematickému problému. Začínáme krátkým pojednáním o analytické metodě R. Descartesa, na kterou později navázal G. Polya. O něm hovoříme zejména v souvislosti s fázováním řešitelského procesu, které ovlivnilo další autory, zvláště A. Schönfelda. Souhrn jeho teorie popisujeme rovněž v této podkapitole, která se dále zabývá druhy intuicí podle E. Fischbeina a názory vybraných autorů na faktory ovlivňující úspěšnost řešitelského procesu. Ve čtvrté podkapitole se orientujeme na slovní úlohu, její charakter, vrstvy a odlišnosti mezi jednoduchými a složenými úlohami. Stěžejními pojmy této podkapitoly jsou modely a reprezentace. Pátá podkapitola je zaměřena na etapy řešitelského procesu, klíčovými pojmy jsou uchopování, strategie a diagnostika řešení. Poslední část teoretické kapitoly věnujeme akčnímu výzkumu, jelikož souvisí s mým vlastním výzkumem.

2.1 Řešení problémů (Problem solving)

2.1.1 Vymezení pojmů „problém“ a „řešení problému“

Řešením problémů se zabýváme v případech, kdy potřebujeme překonat nějaké překážky za účelem nalezení odpovědí na otázky nebo dosažení konkrétních cílů. Pojem *problem solving* se používá v mnoha oborech, často s různými pohledy a odlišnou terminologií. Nepovažujeme za potřebné věnovat vymezení uvedených pojmů zvláštní pozornost, neboť to neleží v hlavním toku našeho zkoumání.

Omezíme se na jediného autora, Ch. M. Eastmana (1969), jehož vymezení nám vyhovuje. Začněme citací: „Všechny problémy se skládají z překládání nějaké entity (A) do jiné entity (B), která je určena cílem, jehož má být dosaženo (A → B). Hlavní úsilí teorie řešení problému je upřeno na takové problémy, kde je specifikován, buď explicitně nebo na základě dohody, nějaký počáteční stav (A), dále operátor (→), který umožňuje změnu stavu, a cíl (B), jehož má být dosaženo“[1](Eastman, 1969; s. 669). Problémy

[1] vlastní překlad; originál: “All problems can be said to consist of translating some entity (A), into some other entity (B), which is specified in terms of goals to be achieved (A → B). The major efforts of problem solving theory to date deal with problems where A, the initial problem state, →, the operators available to alter the problem state, and B, the goals to be achieved, …“ (Eastman, 1969; s. 669)

lze podle Eastmana obecně klasifikovat jako *ill-defined a well-defined*, tedy jako špatně definované a dobře definované. Špatně definovaný problém je takový, který postrádá nějakou část své specifikace (přesné vyjádření cíle) a řešitel tedy musí nejprve určit tyto chybějící údaje. Oproti tomu dobře definované problémy mají jasně dané cíle, jasně definované cesty řešení i očekávaná řešení. Dobře definované problémy umožňují lepší počáteční plánování celého řešitelského procesu, který od řešitele vyžaduje pragmatiku (logiku) a sémantiku (interpretaci problému). Schopnost porozumět tomu, co je cílem problému a jaká pravidla použít k jeho dosažení, je klíčem pro úspěšné vyřešení problému. Eastman zdůrazňuje, že velkou roli hraje v tomto procesu flexibilita a kreativita řešitele.

2.2 Pohledy vybraných psychologických směrů na řešení problému

2.2.1 Gestalt psychologie a behaviorismus

První výsledky týkající se porozumění procesu řešení problémů a problémových situací se objevily na konci 19. století v práci britského badatele C. L. Morgana (1894). Experimentováním se zvířaty, jejichž chování při řešení problémů vysvětloval reflektováním procesů vlastního myšlení, poukázal na zásadní význam získávání zkušeností metodou, které dal jméno pokus - omyl *(trial and error)*. Jeho výzkum přinesl zásadní tvrzení, které vešlo do literatury pod názvem Morganův kánon *(Morgan's canon)*: „V žádném případě nemůžeme interpretovat akci jako výsledek vyšší psychické schopnosti, pokud to může být interpretováno jako výsledek cvičení toho, co stojí níže na psychologické škále“[2].

Na práci C. L. Morgana navázal E. L. Thorndike, ovlivněný Darwinovou teorií evoluce. Snažil se dokázat neustálé učení se zvířat obdobným způsobem jako u člověka. Na základě vlastních experimentů se zvířaty („puzzle box[3]“) dospěl k závěru, že správná odezva na problémovou situaci je výsledkem opakovaných pokusů a omylů a nelze najít důkaz o uvažování nad řešením a řešením vhledem. Zvíře postupně třídí své projevy na základě jejich

[2] Morgan´s canon: “In no case may we interpreted an action as the outcome of a higher psychical faculty, if it can be interpreted as the outcome of the exercise of one that stands lower in the psychological scale. (V textu uveden vlastní překlad). Citace převzata z Hergenhahn, Henley, (2013; s. 355–356).

[3] Thorndike prováděl experimenty zejména s koťaty. Hladové kotě umístil do „problémové skříňky“, tzv. „puzle box“, před níž umístil kousek ryby. Sledoval, jakým způsobem se kotě chová a po jak dlouhé době dokáže provést nějaký jednoduchý úkol vedoucí k otevření dvířek skříňky. Kotě nejprve zmateně pobíhalo ve skříňce, až náhodně provedlo úkol, kterým si dvířka otevřelo a tím se dostalo k potravě (např. sešláplo destičku, zatáhlo za smyčku apod.). Při opakovaném pokusu se čas vedoucí k dosažení odměny výrazně zkracoval a ubývalo nahodilého chování (Crider a kol., 1989, str. 219, in Plháková, 2006, Thorndike 1898).

důsledků, tedy vyřadí ty neúspěšné a úspěšné zachovává. Určité akty chování se stávají instrumentem k dosažení uspokojení. Tento způsob učení označil Thorndike jako instrumentální (operantní) podmiňování (také *trial–error learning*). Průběh podmiňování vysvětloval tzv. zákonem efektu (*law of effect)* - akty chování, které v určité situaci vedou k uspokojení, se v ní později vyskytnou s větší pravděpodobností, než akty chování, které k uspokojení nevedou, a zákonem cviku (frekvence) – síla a trvání spojení mezi podnětem a reakcí je přímo úměrná četnosti vzniku dané situace, tedy opakováním se spoje zesílí, nečinností naopak slábnou. Podstatou podmiňování je vytváření spojů (konekcí) mezi podněty a reakcemi, tzv. S – R schéma *(stimulus-response).* Opakováním pokusů dochází ke zvyšující se tendenci automatizace a zároveň i k rychlému přijetí správné reakce (Hergenhahn, Henley, 2013; s. 354–360). Charakter realizovaných experimentů umožňoval měřit chování zvířat i lidí, což nakonec vedlo k myšlence využít schopnost učení se k měření inteligence (Thorndike, 1924).

Dílo a výzkumy Thorndikea (zvláště operantní podmiňování) ovlivnily nejslavnějšího představitele behaviorismu B. F. Skinnera, který na ně navázal. Systematicky popsal důsledky chování, které ovlivňují frekvenci jeho dalšího výskytu. Důsledky mohou být dvojího typu – zpevňování nebo trestání. Pozitivní zpevnění je určitý projev chování, který je odměněn něčím, co vyvolá příjemné pocity (prezentace něčeho nového). Negativní zpevnění je důsledkem chování ve smyslu zmírnění nebo zastavení působení nepříjemných podnětů (něco je odebráno). Negativní zpevňování bude zvyšovat frekvenci chování, které je podmíněno odstraňováním něčeho. Pozitivní nebo negativní trestání bude snižovat frekvenci chování, které je tím podmíněno. Negativní zpevnění ovšem není trest. (Skinner, 1972; O' Donohue, 2001, s. 92)

V letech 1913–1920 provedl Wolfgang Köhler, jeden ze zakladatelů tvarové psychologie (Gestalt psychologie)[4], řadu experimentů se šimpanzi. Každý z těchto experimentů zahrnoval získání potravy, která nebyla přímo dostupná díky nějaké bariéře. Nejznámější je jeho experiment se šimpanzem Sultánem, který spojil dohromady dvě tyče, aby se mohl dostat k banánům umístěným mimo klec. Na tomto experimentu postavil Köhler svou teorii učení vhledem. Jedná se o náhlou realizaci řešení problému, která není výsledkem pokusů

[4]Tvarová psychologie vidí duševní proces jako proces strukturování, proces tvoření gestaltů - celků. Princip vzniku tohoto celku ilustruje vhled. Učení je chápáno jako schopnost řešit problémové situace, kdy se na problém musíme dívat jako na celek a jeho nadřazenost nad částí (Plháková, 2004).

a omylů, reakcí na změny prostředí nebo výsledkem pozorování někoho, kdo řeší problém. Problém je vyřešen na základě vhledu, tedy díky vnímání vlastností objektu ve vztahu k určitým rysům problémové situace. Právě díky vhledu dochází u řešitele k dlouhodobé změně. Při opětovném setkání se stejným nebo podobným problémem je řešitel schopen problém vyřešit rychleji, realizace aktuálního řešení závisí na dovednostech a znalostech získaných v minulosti. Řešení vhledem bývá také označováno jako „AHA“ moment.

2.2.2 Kognitivní přístup

V první polovině 20. století dominoval v USA behaviorismus. Zlom přinesla 50. a 60. léta se zrodem kognitivní psychologie, která se zaměřila na zkoumání mentálních (zejména kognitivních) procesů (Plháková, 2004). J. Piaget zveřejnil svou teorii kognitivního vývoje na základě etapizace ontogeneze, kde charakterizoval jednotlivé etapy na základě převládajících intelektuálních operací, a zavedl do psychologie termín myšlenková operace. Tu lze vymezit jako účelnou mentální manipulaci s psychickými obsahy, která směřuje k řešení rozmanitých teoretických i praktických problémů, je podstatou poznání. Nejběžnější je manipulace s pojmy, základními prvky myšlení. Myšlenková operace je komparace, která zjišťuje podobnosti a rozdíly mezi jevy, je tedy výchozím předpokladem pro formování pojmů. Piaget rozlišuje logické a heuristické myšlenkové operace. Logické se řídí přesnými pravidly, někdy označovanými jako algoritmy. Jsou to specifické myšlenkové postupy, série kroků vhodné pro řešení určitého typu problému. Pokud je dodržíme, dospějeme ke správnému závěru (Piaget, 1964, 1999, 2007).

2.2.3 Heuristika

Koncepce heuristického uvažování se rozvíjela zejména v 50. a 60. letech 20. století v souvislosti s úsilím o vytvoření počítačové simulace lidského myšlení, tedy umělé inteligence. Za průkopníky jsou považováni A. Newell a H. Simon (1959, 1971, 1972). Vytvořili počítačový program, který pojmenovali GPS – *General Problem Solver.* Ten měl fungovat jako univerzální nástroj pro řešení problémů. Byl to první program, který odděloval znalosti o problémech (vstupní pravidla) od strategií řešení problémů. Program dovedl řešit jednoduché problémy (formalizované), ovšem nedokázal řešit problémy z reálného světa. Problém autoři vymezili jako situaci, v níž se nacházíme v určitém výchozím stavu a chceme dosáhnout jiného stavu, cílového. V řadě problémových situací lze využít analýzu prostředků z hlediska cílů *(means – end analysis).* Ta směřuje k redukci rozdílu mezi současným a cílovým stavem. Pokud je tento rozdíl velký, je užitečné stanovit si několik dílčích cílů, které představují jednotlivé stupně řešení problému *(goal stacks).*

2.3 Proces řešení matematického problému z pohledu vybraných autorů

Matematické problémy (úlohy) a jejich řešení znamenají časté téma pro řadu zahraničních i domácích autorů (Polya, Schönfeld, Fischbein, Kilpatrick, Vyšín, Odvárko, Kuřina, Hejný, Novotná, Tichá atd.). Ačkoliv se odlišují v používání termínů „úloha“, „problém“, „příklad“ apod., východiskem je vždy nějaký problém (problémová situace) a požadavkem k řešení je otázka.

Pro porozumění matematickému problému a jeho řešení je zapotřebí matematického uvažování, což je jedna ze složek matematických schopností, které vytváří specifickou složku inteligence. Matematické uvažování můžeme tedy chápat jako jistý způsob myšlení, který se projevuje porozuměním podstatě problému a jeho vyřešením (Geary, 1996).

Běžné problémy *(routine problems*) jsou takové, kdy řešitel ví, jak je řešit, a to na základě předchozích zkušeností. Vyžadují reprodukční myšlení, tedy pouhé vybavení a aplikaci známého postupu řešení. Nestandardní problémy *(nonroutine problems)* jsou takové, kdy žák nejprve neví, jaký způsob řešení použít. Vyžadují produktivní myšlení, vlastní objevení způsobu, jak problém pochopit a vyřešit. Je zde možnost „hádání a ověření“ *(guess and check),* tedy metoda pokus – omyl. Vývoj strategií pro řešení nestandardních problémů závisí na porozumění veličinám podílejících se na problému a jejich vztahům, jako i na plynulosti v řešení standardních problémů. Součástí učení se strategiím je také naučení se dovednosti umět nahradit těžkopádné postupy řešení těmi výstižnějšími a efektivnějšími (Kilpatrick a kol., 2001).

2.3.1 Descartes a jeho analytická metoda

První pokus o formulaci spolehlivé a obecné analytické metody lze spatřit v díle René Descartesa, francouzského matematika, fyzika a filosofa 17. století. Svou metodu formuloval poprvé v nedokončeném díle *Pravidla pro řízení intelektu*, podruhé (stručněji) v *Rozpravě o metodě*. Descartes je považován za zakladatele moderní kritické epistemologie (gnozeologie), jež zkoumá lidské poznání, jeho vznik, proces a předmět. Ve své skepsi zpochybňuje vše, o čem pochybovat lze.

„A jako mnohost zákonů bývá často omluvou neřestem, takže stát je mnohem lépe řízen, má-li jen velmi málo zákonů, jež jsou velice přísně zachovávány: tak jsem se domníval, že místo onoho velkého počtu pravidel, z nichž je složena logika, budu mít dosti na čtyřech, jen rozhodnu-li se pevně a nastálo, že se od nich ani jedinkrát neuchýlím. První bylo, nepřijímat nikdy žádnou věc za pravdivou, již bych s evidencí jako pravdivou nebyl poznal: tj. vyhnout se pečlivě ukvapenosti a zaujatosti, a nezahrnovat nic víc do svých soudů než to, co by se objevilo tak jasně a zřetelně mému duchu, abych neměl žádnou možnost pochybovat o tom. Druhé, rozdělit každou z otázek, jež bych prozkoumával, na tolik částí, jak je jen možno a žádoucno, aby byly lépe rozřešeny. Třetí, vyvozovat v náležitém pořadí své myšlenky, počínaje předměty nejjednoduššími a nejsnáze poznatelnými, stoupaje povlovně jakoby se stupně na stupeň až k znalosti nejsložitějších, a předpokládaje dokonce řád mezi těmi, jež přirozeně po sobě následují. A poslední, činit všude tak úplné výčty a tak obecné přehledy, abych byl bezpečen, že jsem nic neopominul“ (Descartes, 1992, str. 17).

2.3.2 Fázování řešitelského procesu

G. Polya (1971) spatřoval v řešení problémů praktickou dovednost, kterou lze získat (stejně jako jiné praktické dovednosti) imitací a nácvikem. Řešitel tedy může svou dovednost řešit problém rozvíjet jednak pozorováním jiných řešitelů a spoluprací s nimi, jednak opakováním a procvičováním. Základní strukturace řešení problému, ze kterého vychází řada dalších autorů, je rozdělení, kde Polya popisuje tyto čtyři fáze: <u>1. Porozumění</u> *(understand the problem),* <u>2. Vytvoření plánu řešení</u> *(make a plan),* <u>3. Realizace plánu</u> *(carry out the plan),* <u>4. Kontrola</u> *(look back).* Jednotlivé fáze představíme detailněji:

<u>Porozumění problému</u>

„Je hloupé odpovídat na otázku, které nerozumíš“[5] (Polya, 1971, s. 6). Žák by měl problému nejen porozumět, ale být také vnitřně motivován k jeho úspěšnému vyřešení. Nejprve je pro něj nutné porozumět verbálnímu sdělení, tedy zadání problému. Důležitá je schopnost vyjádřit podstatu problému vlastními slovy a také umět poukázat na hlavní části problému, na neznámé, data a podmínky. Žák by měl zvážit tyto hlavní části pozorně, opakovaně a z různých stran. Pokud je to možné, může na vztahy v problému poukázat také graficky. Na místě je rovněž položení si otázky, zda je vůbec možné splnit podmínky zadané v řešeném problému.

<u>Vytvoření plánu</u>

„Plán máme tehdy, když víme, nebo minimálně v obrysu víme, jaké kroky, výpočty nebo konstrukce musíme provést, abychom získali hodnotu neznámé“[6] (Polya, 1971, s. 8).

[5] vlastní překlad, originál: “It is foolish to answer a question that you do not understand.“ (Polya, 1971, s. 6)

[6] vlastní překlad, originál: “We have a plan when we know, or know at least in outline, which calculations, computations, or constructions we have to perform in order to obtain the unknown.“ (Polya, 1971, s. 8)

Cesta od porozumění problému ke koncipování plánu může být dlouhá a klikatá. Ve skutečnosti tkví hlavní úspěch v řešení problému v samotném objevení myšlenky plánu. Tato myšlenka se může vynořovat postupně, ale také náhle, zcela jasně, po zřejmě neúspěšných pokusech a období váhání. Pokud žák není schopen řešit aktuální problém, může se zamyslet nad otázkou, zda zná nějaký příbuzný, související problém. To je ovšem obtížné, jelikož často zná příliš mnoho problémů, které jsou nějak vztaženy k problému aktuálnímu. Jak tedy vybrat jeden nebo několik z nich, které budou užitečné? Polya radí „podívat se na neznámou a zkusit přemýšlet o podobném problému, který má stejnou nebo podobnou neznámou“[7] (Polya, 1971, s. 9). Žák se tímto způsobem může dostat ke správné myšlence, ale nemusí tomu tak být vždy. Pokud toto nefunguje, musí najít jiný související bod, a tudíž prozkoumat nové aspekty daného problému. Může také problém přeformulovat. Pokud žák neumí řešit navržený problém, pokusí se řešit nejprve problém podobný, související.

Uskutečnění plánu

Vytvořit plán, postup řešení, není pro žáka jednoduché. K dosažení úspěchu jsou nezbytné získané znalosti, dobré mentální návyky, schopnost koncentrovat se na cíl. Uskutečnit plán je mnohem jednodušší, žák potřebuje v podstatě pouze trpělivost. Plán mu poskytuje obecný přehled. Hlavní nebezpečí tkví v riziku zapomenutí plánu. To se může snadno stát, pokud obdrží plán „zvenku“ a akceptuje ho přes autoritu učitele. Ovšem pokud pracuje žák sám, případně s nějakou pomocí, a sám si koncipuje finální myšlenku, nemůže jednoduše plán „ztratit“. Žák se může přesvědčit o správnosti jednotlivých kroků ve svém řešení buď intuitivně, vhledem (tedy jde o *insight*), nebo pomocí matematické zkoušky.

Pohled zpět, ohlédnutí se

„Při ohlédnutí se na dokončené řešení, po přezkoumání a přezkoušení výsledku a postupu, který k němu vedl, by měly být upevňovány [žákovy] znalosti a rozvíjena [jeho] schopnost řešit problémy“[8] (Polya, 1971, s. 14 – 15). Matematické problémy neexistují izolovaně, je možné mezi nimi najít souvislosti. V závěru procesu řešení se žákovi naskýtá přirozená příležitost zkoumat vazby problému, právě když se ohlédne za celým postupem

[7] vlastní překlad, originál: “Look at the unknown! And try to think of a familiar problem having the same or a similar unknown.“ (Polya, 1971, s. 9)

[8] vlastní překlad, originál: “By looking back at the completed solution, by reconsidering and reexamining the result and the path that led to it, they could consolidate their knowledge and develop their ability to solve problems. (Polya, 1971, s. 14- 15)

vlastního řešení. Pro žáka je toto obzvlášť zajímavé, pokud vyvinul velké úsilí k úspěšnému vyřešení a je si vědom skutečnosti, že tento proces realizoval správně. Při nalezení vazeb na vyřešený problém dovede žák při řešení podobného problému tyto poznatky využít a následně si tím zjednodušit celý proces řešení.

Každá z výše zmíněných etap má svůj význam. Může se ovšem stát, že žák objeví výjimečně jasnou myšlenku a přeskočí všechny popisované fáze, řešení zná okamžitě. To ale není příliš časté. Velmi nežádoucí a nešťastné je žákovo vynechání některé z etap bez konkrétního nápadu na řešení problému, případně vydání se na cestu k řešení na základě výpočtů a konstrukcí bez porozumění podstatě problému. Mnoha chybám se žák může vyhnout průběžným kontrolováním jednotlivých kroků v procesu řešení (Polya 1971).

R. J. Sternberg (2009) rozlišuje v procesu řešení problému 5 fází. Důležitá a pro žáky náročná je počáteční fáze identifikace problému. Stává se, že ačkoli pozorovatel jevy vnímá v celistvosti, nezaregistruje impuls k řešení. Jistý podíl na tom má také obtížnost zadaného problému (zda je vůbec žák schopen problém řešit). V následující etapě dochází k analýze problémové situace, která pomáhá problém jasně pochopit a definovat. Analýza se týká cíle a výchozích faktů, které jsou k dispozici. Dochází k evidenci faktů, které jsou dány, dále ke zjištění těch, které chybí. V této etapě se rozlišuje důležitost zadaných údajů. Poté přichází fáze tvorby hypotéz, která nesmí chybět v žádném heuristickém myšlenkovém postupu. Je to jakési hledání klíče od problémové situace, představa o řešení. Tato fáze se odlišuje od algoritmického způsobu řešení, ve kterém je nastaven každý krok. Proces hledání završuje verifikace hypotéz, kdy jsou hypotézy buď přijaty, nebo odmítnuty, případně může být rozhodnutí oddáleno z důvodu nedostatečného množství informací. Tato fáze je příležitostí pro výcvik kritického a logicky přesného myšlení. Neúspěch či chyba není projevem žákovy neschopnosti, ale výzvou k novým pokusům. Pokud se nedostaví očekávaný výsledek, je nutný návrat k dřívějším fázím.

Také Sternberg používá termín vhled. Ten je podle něj vyjádřením osobitého porozumění problému nebo strategii, která jej napomáhá řešit. Může zahrnovat nové pojetí problému nebo postupu jeho řešení. Často obsahuje odhalování a kombinování důležitých informací (starých i nových) za účelem získání originálního pohledu na problém či jeho řešení. Vhled můžeme považovat za náhlý, ale často je založen na dlouhém uvažování.

2.3.3 Schönfeldův výzkum procesu řešení problému a rozhodovací proces

A. Schönfeld (1992, 2012, 2013) více než 35 let usiloval o zodpovězení otázky, jak lze rozvíjet hlubší porozumění procesu řešení problémů a matematickému myšlení. Jeho první dlouhodobý výzkum věnovaný procesu řešení problémů, výrazně ovlivněný dílem G. Polyi, měl potvrdit skutečnost, že lze žáky naučit širokou škálu strategií k řešení problémů, tzv. heuristik. Schönfeld se o toto pokoušel ve svých třídách proto, aby se z jeho žáků stali efektivnější řešitelé.

Úspěch nebo selhání v řešení problémů jsou podle jeho teorie *Mathematical Problem Solving (MPS)* závislé na čtyřech faktorech – na znalostech (zdrojích), heuristikách, metakognici a přesvědčení. Úspěšnost v řešení problémů lze zaručit jejich opakováním a procvičováním. O 25 let později, na základě svých výsledků, Schönfeld tento názor přehodnotil a shrnul, že MPS nabízí pouze teoretický rámec, nikoliv přímo teorii. Jeho novým hlavním teoretickým požadavkem se stala snaha vysvětlit princip rozhodování řešitele v určitém momentu procesu řešení. Vytvořil teoretickou strukturu procesu řešení problému, ve které jsou zakotveny tyto hlavní složky: zdroje (zejména znalosti), cíle, orientace (přesvědčení, hodnoty, preference) a rozhodovací proces.

Základní struktura procesu řešení je následující: Jedinec vstoupí do daného kontextu se specifickými zdroji, cíli a orientací. Vnímá a mentálně si modeluje situaci, orientuje se v ní. Jisté části informací či znalostí se stávají charakteristickými pro danou situaci, cíle jsou stanoveny nebo posíleny (pokud již dříve existovaly). Řešitel učiní rozhodnutí, které je v souladu s těmito jeho cíli, a to buď vědomě či nevědomě, podle toho, jaký směr sleduje a jaké zdroje použil. Pokud je situace povědomá, známá, je proces relativně automatický, jedná se pouze o aplikaci naučených postupů nebo schémat. Pokud situace není povědomá, je problémová, potom je rozhodovací proces umožněn mechanismem, který je ovlivněn subjektivním postavením očekávaných hodnot. Začíná implementace, tedy praktická realizace předtím teoreticky stanovené myšlenky, sebehodnocení a sebekontrola řešitele probíhají průběžně po celou dobu řešitelského procesu. Ten se opakuje až na úroveň individuálních promluv nebo akcí. Rutinní postupy zaměřené na cíle mají své dílčí postupy, které mají vlastní dílčí cíle. Je-li tento dílčí cíl splněn, jedinec pokračuje k následnému dílčímu cíli nebo ke konečnému cíli. Pokud je proces přerušen, nebo se jedinci jeví dílčí či konečný cíl jako chybný, dochází k návratu do předchozí etapy a rozhodovací proces se znovu nastartuje.

2.3.4 Intuice (Intuition)

V souvislosti s procesem řešení problému se také někdy hovoří o intuici, jako je tomu např. u E. Fischbeina (1975, 1987, 1999). Ten ji vymezuje jako „poznání, která se jeví subjektivně zcela zřejmá, bezprostřední, jistá, globální"[9] (Fischbein, 1999, s. 11). Sám autor spatřuje problém v terminologii, jelikož lze stejnou kategorie pojmenovat různými termíny. To, co Fischbein považuje za intuici, může být jinými autory označováno jako vhled, heuristika, inspirace. Vhledem (insight) bývá myšleno globální a nové uspořádání dat v kognitivní struktuře, které umožňuje nový pohled na řešení a jeho interpretaci v daných podmínkách. V souvislosti se vznikem nového poznatku je velmi často používán tzv. „selský rozum", naivní uvažování, které může být považováno za intuitivní poznatek, tedy „bezprostřední poznatek, který je formou poznání, jež se dotyčnému jeví jako zcela samozřejmé"[10] (Fischbein, 1987, s. 6).

Fischbein (1975, s. 12) vymezuje také jednu speciální kategorii, tzv. předjímající intuici, „souhrnný pohled na řešení problému, který předchází detailnímu zpracování jednotlivých kroků při řešení problému"[11]. Důležitou podmínkou jsou ovšem také předchozí zkušenosti řešitele. Fischbein k tomu říká toto: „Náhlost řešení ve formě intuice neznamená absenci předcházejících zkušeností subjektu. Moment vhledu je pouze okamžikem, kdy jsou poznávací kroky přestaveny do nastávající akce. Nejprve (na kognitivní úrovni) vím, co hledám. Poté již vím, co dělat. Intuice (v tomto případě předjímající intuice) je okamžikem přechodu z první fáze do té druhé"[12] (Fischbein, 1975, s. 15). Intuice může pomoci žákům řešit problémy, se kterými zatím nemají zkušenosti.

---

[9] vlastní překlad, originál: "...cognitions which appear subjectively to be self – evident, immediate, certain, global." (Fischbein, 1999; s. 11)

[10] vlastní překlad, originál: "Intuitive knowledge is immediate knowledge; that is, a form of cognition which seems to present itself to a person as being self – evident." (Fischbein, 1987; s. 6)

[11] vlastní překlad, originál: "Anticipatory intuitions are the global views of the solution to a problem, which precede the detailed explicit step of the problem – solving process." (Fischbein, 1975, s. 12)

[12] "...the suddenness of a solution in the form of an intuition does not imply the absence of antecedents in the subject´s experience. The moment of insight is merely the moment at which the cognitive steps are converted into incipient action. In the first (cognitive) stage, I know what I am looking for: this is the "searching" of intelligent behaviour. In the second stage I know what to do. Intuition (in our case, anticipatory intuition) is the moment of transition from the first to the second stage." (Fischbein, 1975, s. 15)

2.3.5 Faktory ovlivňující úspěšnost řešitelského procesu

Otázkou úspěšnosti řešitelských procesů se zabývají J. Kilpatrick, J. Swafford a B. Findell (2001). Velký vliv na řešitelskou úspěšnost má podle těchto autorů metakognice a schopnost sledovat vlastní porozumění a proces řešení problému. Autoři vymezují pět kategorií, které jsou podle nich zásadní pro úspěšnou práci v matematice, přičemž jednou z těchto kategorií je tzv. strategická kompetence *(strategic competence).* Jedná se o žákovu schopnost formulovat matematické problémy, reprezentovat je a řešit. Je to velmi blízké tomu, co je obecně nazýváno *problem solving* a formulace problému, s tím ovšem musí žáci mít jisté zkušenosti. Pokud je problém formulován, prvním krokem v žákovském řešení je jeho matematická reprezentace, ať už číselně, symbolicky, slovně nebo graficky. Reprezentování problémové situace vyžaduje nejprve vytvoření mentálního obrazu o základních složkách problému. Žák nemůže provádět náhodný výběr čísel, se kterými bude ledabyle provádět aritmetické operace. Je potřeba generovat takové modely problému, ve kterých žák konstruuje mentální modely na základě proměnných a vztahů popsaných v problému. K přesnému mentálnímu reprezentování problému musí žák nejprve porozumět situaci, včetně jejích klíčových prvků. Poté potřebuje vytvořit matematickou reprezentaci problému, zachytit hlavní matematické elementy a ignorovat irelevantní prvky. To může učinit nakreslením obrázku, napsáním rovnice nebo vytvořením nějaké jiné vnější reprezentace. Jedna ze základních vlastností pro řešení problémů je flexibilita, která se rozvíjí rozšiřováním znalostí potřebných pro řešení nestandardních problémů.

2.4 Slovní úloha

2.4.1 Vymezení slovní úlohy

Historie slovních úloh sahá až do starověku, kde vznikly z potřeby společnosti řešit reálné problémy běžného života, jako např. výběr daní nebo výměru polí (Novotná, 2000). V současnosti jsou slovní úlohy považovány za náročnou partii matematického učiva jednak učiteli, jednak samotnými žáky. Nejen z tohoto důvodu věnuje didaktika matematiky této oblasti velkou pozornost. Cílem slovních úloh je dle Novotné (2000) prohloubit zájem žáka o matematiku a rozvíjet jeho schopnost modelovat reálné situace.

V literatuře existuje rozsáhlé množství vymezení slovní úlohy, např. F. Kuřina (1989, str. 61) za slovní úlohu považuje takovou úlohu, kde je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky. Podle M. Hejného (2003) je to taková matematická úloha, která vyžaduje jazykové porozumění a přesahuje do životní zkušenosti.

Slovní úloha je tedy tvořena údaji, z nichž některé jsou dané, jiné hledané, a jsou vyjádřeny pomocí slovních formulací. Slovní úlohy mají své nezastupitelné místo ve výuce a to zejména díky svému didaktickému a diagnostickému potenciálu. Didaktická síla slovních úloh spočívá především v rozvoji žákova myšlení, schopnosti plánování, představivosti, pozornosti. Učitel může na slovních úlohách dokladovat využití matematiky v praktickém životě, což je v současné škole zásadní, jelikož žáci matematiku často vnímají jako cosi izolovaného, co nemá s realitou mnoho společného (podle Blažková, 2002). O diagnostickém potenciálu budeme podrobněji hovořit dále.

Vzhledem k dominantnímu postavení slovních úloh ve vyučování je vhodné dle Květoně (1982) respektování několika konkrétních požadavků na ně: Slovní úlohy by měly být pravidelně zařazovány do všech fází vyučovacího procesu a měly by tvořit ucelený systém, který je pro žáky přiměřený jednak obtížností, jednak vzhledem k jejich věku. Námět by měl být reálný, čímž je posilována provázanost matematiky se životem. Formulace slovních úloh má být jasná a srozumitelná. Po ukončení výpočtů je důležité ověřit správnost vlastních závěrů a zapsat je do slovní odpovědi.

2.4.2 Jednoduché a složené slovní úlohy

Jednoduché slovní úlohy tvoří nejčastěji dva neznámé údaje, k vyřešení vede jeden početní krok. Otázka je zcela jednoznačně a jasně formulována. S takovými úlohami se žák ve škole setkává již od první třídy. Blažková (2002) člení jednoduché slovní úlohy do čtyř kategorií dle početní operace, která je potřebná pro vyřešení dané úlohy:

- Úlohy využívající operaci sčítání
  - Úlohy na určení součtu (např. Eva má 5 míčů a Jana 7 míčů. Kolik míčů mají dohromady?)
  - Úlohy na zvětšení o daný počet jednotek (např. Eva má 5 míčů a dostala ještě 2 nové míče. Kolik míčů má Eva?)
  - Úlohy charakterizované vztahem „o n-více“ (např. Eva má 5 míčů a Jana o 2 míče víc než Eva. Kolik míčů má Jana?)
  - Úlohy charakterizované vztahem „o n-méně“ řešené sčítáním (např. Eva má 5 míčů, což je o 2 míče méně než má Jana. Kolik míčů má Jana?)
- Úlohy využívající operaci odčítání
  - Úlohy na určení rozdílu (např. Eva má 5 míčů a 2 se jí zakutálely. Kolik míčů jí zbylo?)

- Úlohy na zmenšení o daný počet jednotek (např. Eva má 5 míčů a 2 dala kamarádce. Kolik míčů jí zbylo?)
- Úlohy na porovnávání vztahem „o n-méně“ (např. Jana má 7 míčů. Eva má o 2 míče méně. Kolik míčů má Eva?)
- Úlohy charakterizované vztahem „o n-méně“ řešené odčítáním (např. Eva má 5 míčů, což je o 2 míče méně než má Jana. Kolik míčů má Jana?)
- Úlohy na porovnávání rozdílem (např. Eva má 5 míčů a Jana má 7 míčů. O kolik méně míčů má Eva?)

- Úlohy využívající operaci násobení
  - Úlohy na určení součinu (např. Eva si koupila 5 míčů po 17 Kč. Kolik za ně zaplatila?)
  - Úlohy charakterizované vztahem „n-krát více“ (např. Eva má 5 míčů, Mirka jich má třikrát více. Kolik míčů má Mirka?)
  - Úlohy charakterizované vztahem „n-krát méně“ řešené násobením (např. Mirka má 15 míčů, což je třikrát více, než jich má Eva. Kolik míčů má Eva?)
- Úlohy využívající operaci dělení
  - Úlohy na rozdělení na stejné části (např. Mirka má 15 míčů a chce je spravedlivě rozdělit 3 kamarádkám. Kolik míčů dá každé z nich?)
  - Úlohy na dělení podle obsahu (např. Mirka rozdělovala 15 míčů tak, že každé své kamarádce dala 5 míčů. Kolika kamarádkám rozdala Mirka míče?)
  - Úlohy charakterizované vztahem „n-krát méně“ (např. Mirka má 15 míčů, Eva jich má třikrát méně. Kolik míčů má Eva?)
  - Úlohy charakterizované vztahem „n-krát více“ řešené dělením (např. Mirka má 15 míčů, což je třikrát více, než jich má Eva. Kolik míčů má Eva?)
  - Úlohy na porovnávání podílem (např. Eva má 5 míčů a Mirka má 15 míčů. Kolikrát méně míčů má Eva než Mirka?)

Podle výše uvedené kategorizace je zřejmé, že některé úlohy mají takovou slovní formulaci, kdy konkrétní slovo navádí na jistý početní úkon. Takovéto úlohy označujeme jako úlohy přímé. Úlohy, ve kterých konkrétní slovo navádí na početní úkon opačný, jsou pro žáky obtížnější a označujeme je jako úlohy nepřímé (Novák, Stopenová, 1993). Hejný (1999) v souvislosti s touto problematikou hovoří o úlohách, kdy žák zvolí strategii řešení na základě protetického poukazu, tedy informace (signálu), která mu asociuje kalkulativní proces, jakým má danou úlohu řešit. Užívání signálů je součást běžného každodenního života, jelikož urychlují komunikaci mezi lidmi. Mohou být ovšem také nositeli nedorozumění a omylů a v matematice vést ke zvolení špatné řešitelské strategie. Na základě tohoto je velmi žádoucí a vhodné předkládat žákům úlohy s tzv. antisignálem, tedy signálem, kde danému slovu neodpovídá jeho běžná operace, ale právě operace opačná (Hejný, Kuřina, 2001).

Jednoduché slovní úlohy může učitel ztížit přidáváním nadbytečných informací do zadání nebo naopak zatajováním některých důležitých údajů.

Složené slovní úlohy obsahují proti jednoduchým slovním úlohám alespoň dva početní kroky, které nemusí být různé. Každý dílčí výpočet vede k vyřešení dané části úlohy, lze tedy říci, že složené slovní úlohy můžeme rozdělit na několik jednoduchých slovních úloh. Problémem v těchto úlohách je skutečnost, že pokud řešitel udělá chybu v dílčím výpočtu, chyba se mu řetězově táhne dále celou úlohou (Novák, Stopenová, 2003).

2.4.3 Charakter slovní úlohy a její vrstvy

Slovní úloha má podle Hejného (2003) dvojí charakter – dynamický a statický. Pod dynamickým charakterem si představujeme „příběh“, který se odehrává ve dvou či více časových hladinách, nebo případně pracuje s časem, který samovolně plyne. Takovýto charakter mají např. slovní úlohy o věku či o práci. Ve slovních úlohách statického charakteru nehraje čas žádnou roli. Jedná se o situaci, která je daná. Z hlediska náročnosti jsou pro žáky obtížnější úlohy dynamického charakteru, což úzce souvisí s pojmy proces a koncept. Ve slovní úloze je možné rozlišit čtyři vrstvy:

- vrstva příběhu či situace (týká se rámcových představ o úloze)
- vrstva objektů (týká se toho, co tvoří „podmět“ textu úlohy)
- vrstva vztahů (týká se vazeb mezi objekty úlohy)
- vrstva matematické reprezentace (prezentuje přepis textu úlohy do formalizovaného jazyka)

Vrstva příběhu či situace je tvořena expozicí (představením se), během které si řešitel vytváří o úloze vlastní představu. V dalším okamžiku dojde k výzvě – jakémusi impulzu, který nastartuje a orientuje řešitelský proces. Překážka zde nastane, pokud žák není schopen číst s porozuměním.

Vrstvu objektů tvoří osoby a předměty, o kterých úloha pojednává. Objekt, který poukazuje na číslo a je součástí expozice úlohy, označujeme jako vstup. Výstupem označujeme objekt, který je součástí výzvy. Většina objektů je v úloze uvedena přímo, ale můžeme se samozřejmě setkat i s jejich nepřímým uvedením.

Vazby mezi objekty úlohy tvoří vrstvu vztahů. Zejména nás zajímají takové vztahy, které se vztahují ke vstupům a výstupům. Takové nazýváme údaje. Vztahem rozumíme každou sémantickou informaci o objektech úlohy, která může z textu vyplývat přímo nebo nepřímo (opisem). Pokud určitý objekt úlohy zapisujeme určitým znakem, jedná se o označení.

Vrstva matematické reprezentace úlohy vzniká v okamžiku převedení příběhu či situace do formálního, znakového jazyka (rovnice, soustavy rovnic apod.). Vzniklá matematická reprezentace bývá součástí procesu řešení úlohy.

2.4.4 Modely a reprezentace slovních úloh

Vzhledem k odlišnému vnímání těchto dvou pojmů u jednotlivých autorů považujeme za nutné stanovit si pevné vymezení modelu a reprezentace, které používáme v následujícím významu: Za model považujeme to, co je na mentální úrovni žáka (tedy v jeho hlavě). Reprezentace je již vyjádřením vnějším, které můžeme pozorovat. V mnoha případech je toto členění zbytečně přísné, jelikož pod reprezentací máme na mysli také model, který samotné reprezentaci předcházel. Reprezentace tedy není pouze písemný projev žáka na papíře, ale také myšlenkový proces, který probíhal v jeho hlavě. Žák má ve své hlavě model, který nějakým způsobem reprezentuje, ovšem u dospělého může tato interpretace vyvolat jiný model. Je tedy důležité rozlišovat modely žáků a modely dospělých a nespoléhat se, že modely dospělého jsou pro žáka srozumitelné.

Jedním z důležitých cílů vyučování matematiky je podle F. Kuřiny (1989) naučit žáky matematiku aplikovat, což je ve školské matematice obvykle naplňováno řešením úloh. Na úrovni ZŠ jsou důležité slovní úlohy, v nichž je, jak jsme již zmiňovali, obvykle popsána nějaká reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky. Pro hledání této odpovědi existují dvě možnosti: Provedeme příslušné experimentování v realitě (což je často nemožné, zpravidla drahé a z hlediska matematiky málo významné), nebo úlohu vhodným způsobem reprezentujeme tak, abychom pomocí reprezentace získali odpovědi na položené otázky. Za nejdůležitější reprezentace považuje F. Kuřina (2013) v souladu s Brunerem (1977; cit. v Kuřina, 2013) reprezentace činnostní, ikonické (obrázek, schéma) a symbolické (rovnice, nerovnice,…). Činnostní reprezentací mohou být např. kamínky, počitadlo, soubor knoflíků. Na prvním stupni jsou tyto reprezentace nezastupitelné, jelikož umožňují realizovat aritmetické operace manuálními činnostmi, čímž napomáhají žákům hlouběji si osvojit např. vlastnosti početních úkonů. Ikonická reprezentace představuje přepis textu úlohy s minimálním použitím slov a s názorným vyjádřením vztahů, o něž v reálné situaci jde. Symbolická reprezentace je popis určité reálné situace v jednoduchém konvenčním jazyku, pomocí symbolů. Důležité je, aby reprezentace vyjadřovala pro žáka přesvědčivě reálnou situaci, aby v ní viděl přehlednější informaci o úloze než v původním slovním vyjádření. Reprezentace má pomoci nalézt řešení úlohy a umožnit proniknout k podstatě souvislostí. Proto jsou součástí matematických reprezentací i příslušné algoritmy (např. pravidla řešení soustavy rovnic, geometrické konstrukce apod.). Pokud žáci řeší úlohu přímo (na základě úvahy), nenutíme je reprezentace vytvářet. Reprezentace je pomůcka pro ty žáky, kteří neumí úlohu samostatně vyřešit.

Jako model chápe J. Novotná (2000) prvotní odraz zadání slovní úlohy v hlavě řešitele. Mohou nastat situace, kdy si řešitel nevystačí pouze s modelem vytvořeným v hlavě, což může mít příčinu ve složitosti struktury řešené úlohy a nedostatečném vhledu. Převedení modelu do vnějšího světa pomůže aktivizovat žákovy předchozí zkušenosti. Při převádění slovně zadaného problému do vhodného systému znaků (referenčního jazyka) dochází ke kódování, které řešiteli přinese úspornější záznam dat, podmínek a řešeného problému. Tento záznam označuje autorka jako legendu úlohy. Podle Novotné a Kubínové (1998) mají žáci k dispozici různé druhy legend s ohledem na použití konkrétního referenčního jazyka. Autorky rozlišují legendy následujícím způsobem[13]:

- slovní legenda (zkrácené zadání úlohy, ve kterém žák používá slova, jež považuje za významná vzhledem k dosažení cíle úlohy)
- obrázková legenda (žák využívá obrázku či schématu k zachycení důležitých vztahů úlohy)
- algebraická legenda (čistě matematický zápis, např. rovnice)
- geometrická legenda (specifický případ obrázkové legendy, v níž žák používá geometrické útvary)

Řešením slovních úloh a reprezentacemi se dlouhodobě zabývá také M. Tichá (1998). Na základě svého výzkumu potvrzuje skutečnost, že vizuální reprezentace (obrázková,

[13] Nejedná se o kompletní výčet, dle našeho názoru sem patří rovněž tabulková legenda, kdy je úloha reprezentována prostřednictvím tabulky. Z našeho pohledu by měla být vyčleněna také číselná legenda, jelikož pod algebraickou legendou rozumíme jazyk písmen, nikoliv jazyk číslic.

ikonická) může žákům pomáhat při uchopování slovních úloh, ale zároveň poukazuje na skutečnost, že nemusí být vhodná pro všechny žáky. Někteří žáci používají obrázky jako ilustraci svého řešení – úlohu nejprve vyřeší (např. úsudkem) a poté, ve snaze toto řešení potvrdit, jej doplní ilustrací. Ovšem nakreslení obrázku ještě neznamená, že žák úloze a jejím podmínkách porozuměl a uchopil úlohu takovým způsobem, který ho dovedl ke správnému řešení. U velkého množství žáků se objevuje metoda řešení experimentální cestou (pokus – omyl). Jsou i takoví žáci, kteří se nesnaží úlohu uchopit, ale za každou cenu „něco vypočítat" a svou energii věnují provádění výpočtů. Výzkum potvrdil skutečnost, že čím starší žák je, tím více preferuje symbolický zápis proti vizuálním reprezentacím, řešením experimentálním apod. Přitom podle Tiché (1998) znakový systém do jisté míry brzdí žákovu tvořivost a schopnost vytvářet modely. Starší žáci nejsou úspěšnější při řešení slovních úloh, jsou pouze zběhlejší v početní technice.

2.5 Řešení slovních úloh

Řešení slovních úloh znamená aplikaci matematických znalostí a potvrzení úrovně jejich zobecnění. Způsob, jakým žák úlohu řeší, signalizuje úroveň jeho matematického uvažování. Schopnost pochopit podstatu slovní úlohy znamená jistou nezávislost na číselném zápisu úlohy, tedy na jednoznačné formulaci toho, co má být řešeno. Jedná se o určitou generalizaci. Dosažení této úrovně lze chápat jako jednu z fází vývoje matematických dovedností a uvažování (podle Vágnerová, 2001).

2.5.1 Etapy řešitelského procesu u slovních úloh

Řešitelský proces obecně zkoumaný v 2.3 budeme nyní zkoumat ve specifickém prostředí slovních úloh.

Řešitelský proces žáka je možné rozfázovat do několika navazujících etap. Zde se autoři více či méně odlišují, např. Divíšek a kol. (1989) uvádí následující členění do šesti fází:

- porozumění textu (pochopení přečteného textu a ujasnění si, co známe a co máme vypočítat; dále rozlišení údajů potřebných pro vyřešení úlohy a údajů nadbytečných)
- rozbor (objevování vztahů, které pomohou v následující fázi matematizace; zamyšlení se, zda se řešitel s podobnou úlohou již setkal, a pokud ano, jak ji řešil; rozbor může být rovněž grafický)
- matematizace reálné situace (vyústění rozboru; zvolení neznámé a vyjádření ostatních údajů; matematizace může být i grafická)

- řešení matematické úlohy (řešení vytvořené rovnice či grafické znázornění; před samotným řešením je vhodné udělat odhad, který může zároveň sloužit jako určitá kontrola reálnosti výsledku)
- ověření správnosti zkouškou (jedná se o správnost numerickou – správnost výpočtů, a správnost věcnou – zda naše řešení odpovídá podmínkám úlohy)
- slovní odpověď (nedílná součást řešení; žák slovní odpovědí potvrzuje svůj výsledek a přebírá za něj odpovědnost)

Z tohoto dělení vychází rovněž Blažková (2002), která vyčleňuje samostatnou fázi pro vytvoření odhadu před matematickým řešením úlohy.

2.5.2 Uchopení slovní úlohy (Grasping)

Pro úspěšné řešení slovní úlohy je podle M. Hejného a N. Stehlíkové (1999) zásadní její uchopení, což je etapa, která se částečně překrývá s výše zmíněnou fází porozumění a rozboru. Autoři rozlišují čtyři etapy procesu uchopování slovní úlohy. Řešitel si nejprve vytvoří představu, čeho se úloha týká a vzpomíná, zda už podobnou úlohu řešil. Poté eviduje vztahy mezi objekty úlohy a zapíše, označí nebo nakreslí, co je dáno a co má zjistit. Nakonec si řešitel vytvoří představu o úloze jako celku a na základě toho vyvodí strategii, jak bude úlohu řešit.

Všechny výše zmíněné etapy se prolínají, řešitel se k jednotlivým fázím vrací. Pokud žák úloze neporozumí, neuchopí ji, dochází k rezignaci, podvádění, náhodné kalkulaci nebo náhradnímu uchopování (viz. 2.4.2).

Uchopováním rozumí J. Novotná (1997, 2000) první ze tří etap řešitelského procesu slovní úlohy, přičemž následující etapy tvoří transformace a návrat do kontextu úlohy. Etapa uchopování obsahuje několik kroků. Zahrnuje uchopování všech objektů, vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace a eliminaci takových, které jsou „navíc“. Další součástí je hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu, hledání a nalezení sjednocujícího pohledu a získání celkového vhledu do struktury problému. V souladu s (Hejný, 1995) rozlišuje uchopení úlohy s porozuměním tehdy, pokud je výsledkem procesu uchopení porozumění, a protetické uchopení v případě, je-li tomu naopak. Za vhled považuje autorka ucelené pochopení vztahů mezi prvky vystupujícími v zadání slovní úlohy a uvědomění si souvislostí mezi nimi. Etapa transformace zajišťuje přenos odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému. Poslední etapa znamená návrat. Takto popsaný řešitelský proces se v praxi nemusí často objevovat, lze v něm pozorovat odchylky, řešitel se může k jednotlivým etapám vracet či případně nějakou vynechat.

2.5.3 Strategie pokus - omyl

Strategií rozumí J. Novotná (2000) odpověď řešitele na otázku „Jak úlohu řešit?“. Jedná se o vytvoření souhrnu pravidel (plánu řešení), který bude určovat řešitelův následný postup. Žák, který má obtíže při čtení s porozuměním, se získáním vhledu do struktury vztahů v zadání, nebo mu chybí dostatečné matematické zázemí pro vyřešení problému, může úlohu řešit strategií pokus – omyl. Při tomto způsobu řešení mohou nastat tyto případy:

A/ Řešitel prohlásí za výsledek své řešení z prvního pokusu, neprovede kontrolu, zda toto jeho řešení vyhovuje podmínkám zadání, nehledá další možná řešení.

B/ Řešitel kontroluje svůj výsledek, zda vyhovuje podmínkám zadání. Řešení označí za správné. Následují dvě možné cesty – řešitel dále nehledá jiná možná řešení, nebo se řešitel snaží nalézt ještě další řešení. Tyto další řešení může opětovně hledat cestou pokus – omyl, ovšem většinou má již do úlohy vhled a nepracuje dál náhodně.

C/ Řešitel při kontrole správnosti svého výsledku zjišťuje, že tento výsledek nevyhovuje. Může opět postupovat dvěma způsoby – ukončit řešení nebo hledat jiné řešení, a to buď opět pokusem – omylem, nebo si zvolit jinou strategii při hledání řešení na základě předchozí zkušenosti (Novotná, 2000).

2.5.4 Diagnostické fenomény žákovského řešení slovní úlohy podle M. Hejného

Řešitelský proces žáka je možné efektivně zkoumat na základě analýz jeho písemného projevu. Správná řešení nejsou po této stránce až tak zajímavá, ovšem i mezi nimi lze objevit zajímavé žákovské strategie. Naopak řešení nevšední, grafická a řešení s chybami mohou učiteli sloužit jako velmi nosný diagnostický materiál.

Podle M. Hejného (2005) je možné u žákovského řešení slovní úlohy analyzovat několik fenoménů – uchopení úlohy, interpretaci úlohy, jazyk řešení, vizualizaci, řešitelskou strategii, proces řešení a odpověď. Tyto fenomény popíšeme podrobněji:

Proces uchopování (Grasping Process)

Jak již bylo zmíněno výše (v 2.5.2), uchopování probíhá ve vědomí řešitele při vnímání textu úlohy. Počíná okamžikem, kdy žák začne úlohu číst a končí okamžikem interpretace úlohy, tedy ujasněním si, co je cílem. Při nejasnostech se řešitel k textu úlohy vrací, aby si informace ujasnil či hledal jinou interpretaci. Pokud zahájí náhradní uchopovací proces (např. snaží se opsat řešení), reaguje úhybně. Může také nastat situace, kdy řešitel odmítne úlohu řešit, tedy reaguje rezignací. Zde k procesu uchopování dochází pouze v omezeném rozsahu, nebo k němu nedochází vůbec. Někteří žáci vidí cestu k řešení úlohy okamžitě po jejím přečtení, pro ně je uchopování úlohy nepotřebné. Pokud by přesto bylo vyžadováno, mělo by dopad v podobě ztráty motivace řešitele.

Interpretace (Interpretation)

Úlohy můžeme rozlišit na jednoznačné a nejednoznačné. Pokud má úloha jednoznačné zadání, její interpretace je buď správná, nebo vadná. Proti tomu nejednoznačná zadání připouští vícero interpretací (např. pod slovem „týden“ rozumí někteří žáci pět dní, jiní sedm dní). Právě takovéto úlohy umožňují žákovské diskuse a zvyšují čtenářskou gramotnost. Důležité je, aby žák dovedl svou interpretaci obhájit.

Jazyk (Language)

V žákovských řešeních je možné vidět rozmanité jazyky – slova, písmena (nejčastěji x), ordinální čísla, kalkulace, vizualizace (grafy, obrázky, schémata), ilustrace (výtvarné artefakty), přičemž často dochází k jejich vzájemné kombinaci. Žáci by měli být povzbuzováni ke znázorňování problémové situace, jež mají řešit. Pokud žákům předčasně zavádíme jazyk písmen a vyžadujeme jej, vzniká v jejich vědomí neporozumění (nemají potřebu tohoto jazyka) a do budoucna toto zakládá formální poznání. Pro většinu žáků je neúčinnějším prostředkem k získání vhledu do úlohy právě obrázek, který jim může zároveň ukázat i cestu pro řešení úlohy.

Vizualizace a ilustrace (Vizualization and ilustration)

Vizualizací se rozumí takový graficko-výtvarný produkt žáka, který byl vytvořen se záměrem porozumět úloze, najít její řešení nebo pomoci formulovat výsledek. Naproti tomu ilustrace je takový produkt, který plní čistě estetickou funkci a nenapomáhá k porozumění úlohy. Hranice mezi vizualizací a ilustrací není ostrá, proto může být někdy obtížné je v žákovském řešení rozlišit. Žák danou situaci vizualizuje za účelem porozumění úloze, nalezení řešení úlohy nebo formulace výsledku. Obrázky v žákovských řešeních mohou plnit všechny tyto uvedené funkce, ovšem častějším je účel nalezení řešení. Vizualizace podporuje strategii. Ilustrace můžeme rozdělit podle účelu: Žák ilustruje výsledek, čímž si krátí čas, pokud má již úlohu vyřešenou. Ilustrace může být také produktem protetické činnosti žáka, který na řešení úlohy rezignoval. Podle Hejného jsou mezi ilustrátory častěji dívky než chlapci. Žáci, kteří kreslí obrázek, budou používat k řešení také vizualizace.

Řešitelská strategie (Strategy)

Po uchopení úlohy a její interpretaci hledá žák cestu, jak úlohu vyřešit. Objevuje cestu od údajů známých k neznámým. Významnou roli zde hraje také proces zápisu. Právě přehledný zápis bývá pro některé žáky zdrojem objevení důležitého vztahu nebo zákonitosti. Strukturovaný zápis směřuje nikoli k danému problému, ale k problémům následujícím. Schopnost žáka hledat účinné řešitelské strategie je podmíněna zkušenostmi žáka se situacemi analogickými jako ta právě zkoumaná, schopností vzájemně propojovat myšlenky a schopnosti výstižně a srozumitelně artikulovat vlastní myšlenky. Tomu můžeme podle Hejného napomoci diskusemi mezi žáky, které budeme povzbuzovat. V diskusi člověk formuluje vlastní postupy (zvědomuje je) a myšlenky ostatních interpretuje a vkládá do vlastních mentálních schémat. Tím dochází k tvorbě nových spojů v kognitivní, případně meta-kognitivní struktuře.

Proces řešení (Solving Process)

Sledujeme, do jaké míry žák zvládá mentálně nebo písemně kalkulativní kroky, které si ve strategii vytvořil. Chyby numerické nemají takovou váhu, jako chyby vzniklé v oblasti řešitelské strategie.

Odpověď (Response)

Ze zápisu odpovědi můžeme usuzovat na edukační styl učitele, zejména na jeho instruktivnost. Žáci vedeni instruktivně budou odpovídat celou větou, úhledně a bez gramatických chyb. Někteří žáci mohou za svou odpověď považovat obrázek a slova již dále nepoužijí. Pokud učitel striktně vyžaduje odpovědi celou větou, snižuje některým žákům autonomii jejich projevu. Zároveň pokud učitel neupozorní na nutnost odpověď jasně formulovat, nepřispívá k rozvoji komunikačních schopností žáka. Za optimální považujeme takovou formulaci výsledku i postupu, kterou by pochopili i žáci z jiné třídy.

2.6 Akční výzkum

2.6.1 Vymezení akčního výzkumu

Akční výzkum je forma aplikovaného výzkumu využívaná v sociálních vědách, která umožňuje profesní růst jednotlivců i zlepšování profesní kvality kolektivu. Reflektuje profesionální pedagogickou praxi, umožňuje změny pro zdokonalování a zvyšování sebepojetí. Neexistuje jednotné vymezení tohoto pojmu, např. dle Pedagogického slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 1998, str. 19) se jedná o druh pedagogického výzkumu, jehož účelem je přímo ovlivňovat či zlepšovat určitou část vzdělávací praxe; akční výzkum zahrnuje intervenční strategie, navrhuje určitá doporučení a pokouší se je realizovat, průběžně sleduje efekty změn a vyvozuje z nich další postup. Nezvalová (2003) vymezuje akční výzkum jako cílený zásah do praxe, který přináší její zlepšení. Podle Janíka (2004) jej tvoří dvě zásadní složky – systematické zkoumání akce a následná snaha o zlepšování těchto situací. Nejprve je tedy důležité získat poznatky o daném problému (= výzkum), poté uplatnit řešení daného problému (= akce). Stěžejním prvkem akčního výzkumu je činnost, aktivita. Tento typ výzkumu provází řada otázek, jako např. Co dělám a proč to dělám? Jak to dělám? Jak to můžu dělat jinak? Co se žáci učí, je to důležité? apod.

2.6.2 Příprava, průběh a cíle akčního výzkumu

Podstatou akčního výzkumu je systematický sběr dat a jejich následná kritická analýza se záměrem zkvalitnit učení a vyučování. Výzkumník tedy získává systematické informace o své práci a tyto poznatky se následně snaží využít ke zlepšení vlastní praxe. Pozoruje, analyzuje, klade si otázky a vyhodnocuje získaná data. Akční výzkum má tedy praktický význam, jelikož je realizován přímo v praxi (zabývá se reálnou situací z konkrétní třídy, školy). Smyslem je zlepšovat profesionalitu učitele, jeho pedagogické myšlení, dovednosti, rozhodovací procesy a naučit se pozorovat sebe sama. Výzkum je zaměřen na učitele i žáka současně, na vzájemnou interakci mezi nimi. Za základní elementy akčního výzkumu jsou považovány akce, reflexe, revize. Dle McNiffa (1988) se jedná o plánování, činnost, pozorování, reflexi a následně nové plánování. Dle Whiteada (1993) se jedná o cyklus pěti kroků: nejprve evidujeme problém, který se objevil v praxi. Vytvoříme si představu o jeho řešení. Zvolíme aktivity k zvolenému řešení. Následuje vyhodnocení výsledků aktivit vedoucích k řešení problému. Poslední fází je modifikace problému.

2.6.3 Typy akčního výzkumu

Dle Nezvalové (2003) s odvoláním na R. A. Schmucka (1997) existují dva typy akčního výzkumu, které se ovšem např. dle Janíka (2004) navzájem prolínají. V pro-aktivním akčním výzkumu (neboli aktivním akčním výzkumu) učitel nejprve vyvine aktivitu a teprve poté zkoumá její výsledky. Jedná se o snahu o nové přístupy, přičemž může učitel vycházet ze svých předchozích zkušeností. Je to tedy cyklus následujících etap: nové přístupy, očekávání, sběr dat, reflexe vyhodnocených dat, další nové přístupy. Oproti tomu reaktivní akční výzkum obnáší nejprve sběr dat, teprve poté se učitel pokouší inovovat praxi. Fáze jsou tedy: sběr dat, analýza dat, distribuce dat a vymezení následných změn, snaha o nové přístupy, pozorování reakcí, sběr dat k diagnostice a ověření, případně nové otázky.

Akční výzkum můžeme dělit rovněž na individuální a kooperativní. Kooperativní akční výzkum rozvíjí dle Stringera (1996) pozitivní pracovní vztahy, umožňuje vzájemnou pomoc, porozumění, naslouchání a diskusi mezi kolegy, pomáhá najít efektivní řešení a poskytuje oporu v pedagogickém sboru. Vyžaduje spolupráci s akademickými výzkumnými pracovníky. Učitelé raději dávají přednost individuálním činnostem. Je ovšem důležitá rovnováha mezi kolegiálním a individuálním přístupem pedagogů.

Akční výzkum se vymezuje zejména skutečností, že je výzkumník přímým účastníkem výzkumu. On sám navrhuje řešení, které následně realizuje ve své praxi. Tradiční výzkum proti tomu sleduje práci jiných, výzkumník je tedy v roli pozorovatele. Nevýhodou akčního výzkumu je jeho velká časová náročnost.

3 Metodologie

V této kapitole uvádím formulace výzkumných otázek, pracovní hypotézy, cíl výzkumu, dále popis výzkumného vzorku a způsob sběru dat. Realizuji výzkum kvalitativní, ve kterém jsem osobně zainteresovaná v pozici učitelky žáků, kteří (nejen) tvoří cílovou skupinu. Vzhledem ke skutečnosti, že výzkum probíhá v prostředí slovních úloh, je stěžejní součástí této kapitoly její didaktická analýza.

3.1 Stanovení výzkumných otázek a hypotéz (mého výzkumu)

Výzkumné otázky

1. Jak lze na základě písemného řešení vhodně zvolených slovních úloh charakterizovat relevantní oblast matematických zkušeností a znalostí žáka?
2. Jak lze toto poznání didakticky využít?

Pracovní hypotézy

1. Potíže mají žáci s uchopováním slovní úlohy.
    - Někteří žáci mají problém se čtením textu a nedokáží z něj vyčlenit podstatné informace.
    - Někteří žáci byli vedeni k určitému zápisu a řešení slovních úloh předepsaným způsobem a tento návyk jim brání úlohu uchopit.

    Reedukační postup je založen na dramatizaci, manipulaci a modelování.
2. Žáci někdy nedokáží rozpoznat antisignál. Reedukační postup zatím neznáme.
3. Žáci trénovaní v počítání „sloupečků“ nejsou úspěšnější v řešení slovních úloh.
4. Tradiční slovní zápis nezvyšuje úspěšnost řešitelského procesu u slovních úloh.
5. Tradiční slovní zápis nezvyšuje úspěšnost řešitelského procesu u slovních úloh.
6. Žáci vedení konstruktivisticky nejen v matematice jsou v tomto předmětu úspěšnější.

3.2 Cíle výzkumu, cílová skupina

Cílem výzkumu je nalezení odlišností v řešitelských procesech žáků na základě analyzování jejich písemných řešení slovních úloh, a zda je možné tyto odlišnosti přisuzovat odlišným výukovým stylům učitelů. Cílovou skupinu tvoří žáci čtvrtého a pátého ročníku základní školy. Někteří z nich jsou vedeni konstruktivistickými přístupy, jiní jsou vedeni tradičně.

3.3 Metody sběru dat

Jedná se o kvalitativní výzkum, jehož cílem je analýza řešitelských procesů. Výzkum je longitudinální v tom smyslu, že řešitelský proces dané skupiny žáků je sledován dlouhodobě. Sběr žákovských řešení byl započat na začátku 4. ročníku (rok 2013) a pokračuje dále do současnosti (rok 2015).

Návrh výzkumných metod a technik

Soubor jevů tvořících charakteristiku řešení bude získán jak z literatury, tak i z přímé analýzy konkrétních slovních úloh. Vytvořili jsme nástroj vhodný pro organizaci zanalyzovaného materiálu, který pomohl zpřehlednit a kategorizovat získaná data. Použili jsme metodu atomární analýzy zkoumání žákovských řešení, dále byla provedena komparativní analýza mezi jednotlivými žáky i třídami jako celky.

3.4 Očekávané výstupy

Směrem k výzkumu:

Jedním z očekávaných výstupů je vytvoření dostatečně velkého a rozmanitého souboru analýz žákovských řešení slovních úloh z prostředí prvního stupně, na kterém bude možné demonstrovat rozdíly ve strategii i numerice mezi žáky vedenými konstruktivisticky a tradičně.

Směrem k praxi:

Analyzovaná řešení bude možné využít v kurzech didaktiky matematiky při přípravě budoucích učitelů nebo při dalším vzdělávání pedagogických pracovníků. Zcela zásadní dopad očekávám pro svou vlastní praxi a profesní růst.

3.5 Didaktická analýza slovní úlohy

Slovní úloha patří k základním nástrojům vyučování matematiky. Učitel ji používá k výkladu nové látky, k procvičování učiva i testování. Většinou přitom využívá úlohy nabízené učebnicí nebo sbírky úloh. Během přípravy scénáře výuky by se měl učitel zamýšlet nad otázkou, jakými způsoby budou žáci slovní úlohu řešit (použití metody pokus – omyl, metody dramatizace, tabulace apod.) a nad přiměřeností úlohy. U náročnějších úloh promýšlí rady, jimiž může pomoci slabším žákům, u snazších úloh uvažuje naopak nad tím, jak úlohu modifikovat, aby byla zajímavá i pro silné žáky. Učitel zde vychází ze svých osobních zkušeností a pracuje zejména intuitivně.

Cílem našich úvah je hlubší didaktická analýza slovní úlohy, která může učiteli usnadnit a zkvalitnit jeho práci. Budeme hledat odpovědi na následující čtyři otázky týkající se slovní úlohy:

1) Jaký je její edukační potenciál, tj. které pojmy, vztahy, procesy, situace nebo argumentace úloha posiluje, nebo dokonce otevírá?
2) Jaký je její diagnostický potenciál, tj. co může učitel usoudit o matematických znalostech a schopnostech žáka na základě žákovského řešení úlohy?
3) Jak je možné využít informace, které nám diagnostika přinese, tj. kterým směrem daného žáka orientovat, jakou úlohu mu dát?
4) Jak lze danou úlohu modifikovat, tj. jak upravit danou úlohu tak, aby byla „šita na míru" tomu nebo onomu žákovi?

3.5.1 Úlohová situace

Úvahy začneme poslední otázkou, protože její řešení nám nejlépe odhalí anatomii slovní úlohy a poskytne nástroje, jak se slovní úlohou zacházet. Hlavní myšlenka je prostá. Nebudeme se pokoušet modifikovat danou slovní úlohu přímo, ale vytvoříme nejprve *úlohovou situaci* – soubor všech objektů (stavů) i vazeb vyskytujících se v úloze. Poté začneme z úlohové situace tvořit modifikované úlohy tak, že některé informace v situaci se vyskytující zamlčíme. Odhalováním utajených informací vznikají nové úlohy, které můžeme předložit žákům.

Myšlenku úlohové situace nebudeme prezentovat na abstraktní úrovni, ale zvolíme konkrétní úlohu, na které veškeré ilustrace ukážeme. Naše tři nejbližší kroky jsou: uvést výchozí slovní úlohu a vyřešit ji, vytvořit k této úloze příslušnou úlohovou situaci a z té následně sestavit sérii různě náročných modifikovaných úloh.

Úloha 1: (převzata z učebnice Matematika pro 4. ročník, Fraus, str. 24)
Honza koupil celkem 20 míčů a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik Kč stál velký míč?

Řešení: Velkých míčů bylo 20 – 14 = 6. Za malé míče Honza zaplatil 14 × 32 = 448 korun. Za velké míče tudíž zaplatil 868 - 448 = 420 korun. Cena velkého míče je 420 : 6 = 70 korun.

Z vyřešené úlohy vytvoříme nyní úlohovou situaci.

Úlohová situace (souhrnná evidence veškerých stavů a vazeb, které se vyskytují v dané úloze) generovaná úlohou 1 obsahuje osm stavů (objektů) a čtyři vazby. Stavy vyjádřené počtem značíme písmenem P s přidaným dolním indexem, stavy vyjádřené veličinou (v našem případě v korunách) označujeme písmenem V (rovněž s dolním indexem). Vazby formulujeme pomocí příslušných operací mezi stavy a vazbami, pro jednodušší manipulaci zavedeme označení písmeny řecké abecedy. Veškeré tyto údaje shrnuje tabulka 3.1:

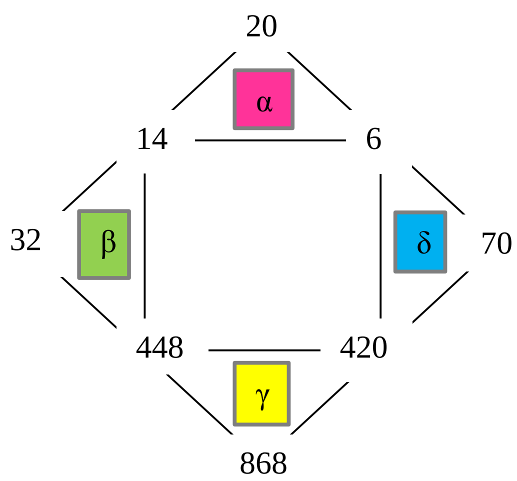
stavy	tři stavy vyjádřené **počtem**: P_1 = počet všech míčů (20) P_2 = počet malých míčů (14) P_3 = počet velkých míčů (6)	pět stavů vyjádřených **veličinou**: V_1 = cena všech míčů (868 Kč) V_2 = cena jednoho malého míče (32 Kč) V_3 = cena všech malých míčů (448 Kč) V_4 = cena jednoho velkého míče (70 Kč) V_5 = cena všech velkých míčů (420 Kč)
vazby	$P_1 = P_2 + P_3$ (resp. $P_2 = P_1 - P_3$, resp. $P_3 = P_1 - P_2$) α $V_3 = V_2 \cdot P_2$ (resp. $V_2 = V_3 : P_2$, resp. $P_2 = V_3 : V_2$) β $V_1 = V_3 + V_5$ (resp. $V_3 = V_1 - V_5$, resp. $V_5 = V_1 - V_3$) γ $V_5 = V_4 \cdot P_3$ (resp. $V_4 = V_5 : P_3$, resp. $P_3 = V_5 : V_4$) δ	

Tab. 3.1

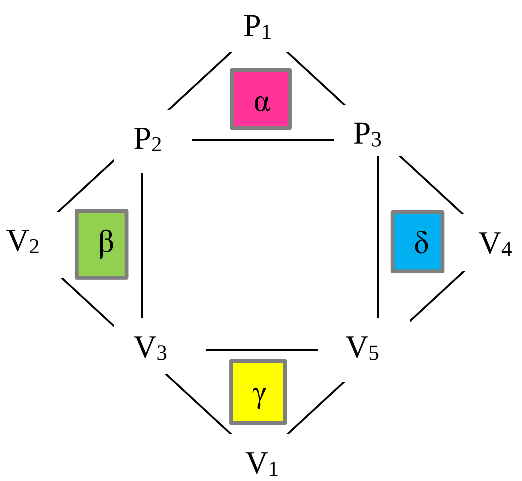
Úlohovou situaci budeme nyní vizualizovat. K tomuto účelu zavedeme *graf úlohové situace*.

<u>Graf úlohové situace</u>

Jedná se o vlastní nástroj vizualizace úlohové situace, ve kterém propojíme stavy i vazby. Na obrázku 3.1 jsou evidovány veškeré stavy (počty i veličiny), vazby mezi jednotlivými stavy i jejich vzájemná vázanost konkrétními čísly. Na obrázku 3.2 realizujeme evidenci v jazyce algebry, tedy pomocí písmen. V obou případech se jedná o konceptuální záznam úlohové situace. K procesuálnímu záznamu se dostaneme dále.

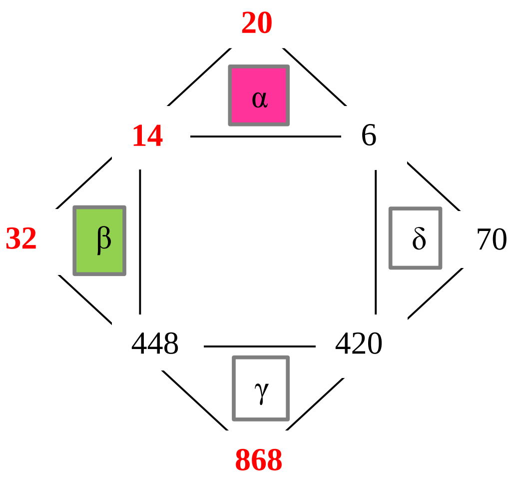


Obr. 3.1

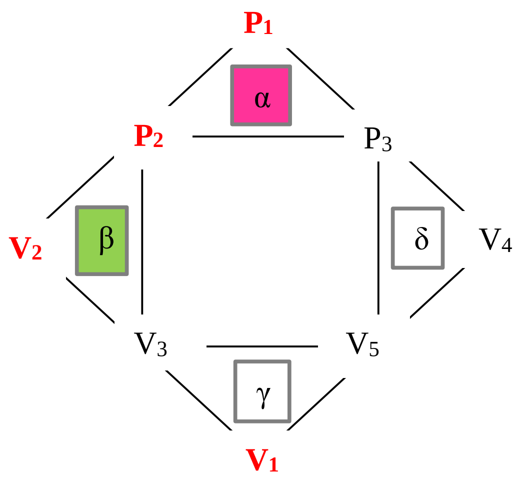


Obr. 3.2

Dále obrázek 3.1 i 3.2 upravíme: zvýrazníme červeně všechny čtyři zadané počty a veličiny z naší úlohy 1:



Obr. 3.3

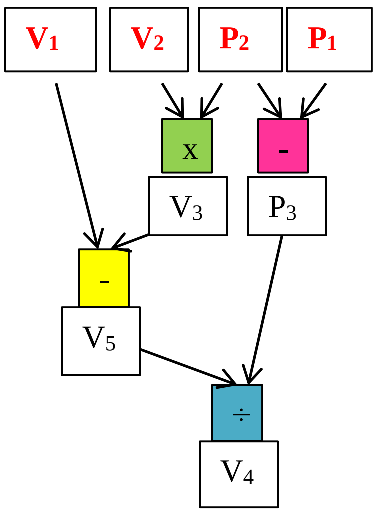


Obr. 3.4

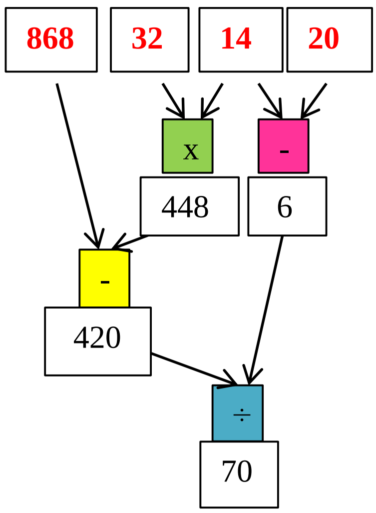
Nyní můžeme dobře vidět, jaké vazby lze vypočítat okamžitě – jedná se o ty vazby, ve kterých známe dvě libovolné hodnoty, z nichž vypočítáme hodnotu zbývající, tedy v našem případě vazby α a β. Na pořadí výpočtů nezáleží.

Z obrázků nyní vytvoříme *graf procesu řešení*. V něm zaznamenáme početní operace vedoucí k odhalení dalších stavů. Z konceptuálního záznamu se tedy dostáváme k procesuálnímu záznamu řešení úlohy.

Graf procesu řešení úlohy 1 je na obrázcích 3.5 a 3.6:



Obr. 3.5



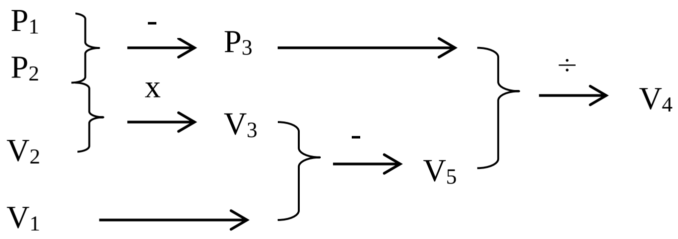
Obr. 3.6

Z grafu procesu řešení vidíme, že úloha 1 je dána údaji: V_1, V_2, P_2 a P_1 (numericky: $P_1 = 20$, $P_2 = 14$, $V_1 = 868$ Kč, $V_2 = 32$ Kč/kus). Šipky ukazují, že jsou zde dva nezávislé řešitelské toky (na jejich pořadí nezáleží), které se na konci slijí. Situace je znázorněna v tabulce 3.2:

2krokový tok	1krokový tok	„soutok“
(14 ks, 32 Kč) → (448,868) → 420	(20,14) → 6	(6,420) → 70

Tab. 3.2

Přehlednější záznam informací tabulky 3.2 je na obrázku 3.7, který nazveme *graf řešitelských toků.*



Obr. 3.7

Z grafu řešitelských toků vidíme nezávislost obou dílčích toků, jejich „soutok“ i operace, kterými se jednotlivá čísla získávají[14].

3.5.2 Tvorba modifikovaných úloh z popsané úlohové situace

V úlohové situaci jsou všechny objekty i vazby známy. Tím, že některé objekty utajíme, dostáváme úlohu. V úloze 1 byla utajena čtyři čísla: 6, 448, 70 a 420. Známá byla čtyři čísla: 20, 14, 868 a 32. Tedy čtyři čísla byla dána, čtyři utajena. Ptáme se, zda toto musí platit vždy, nebo zda se počet utajených/známých čísel může měnit. Jelikož v úlohové situaci existují čtyři vazby a každá z nich může najít pouze jedno utajené číslo, je jasné, že utajených čísel nesmí být více než čtyři. Na druhé straně, pokud bude utajených čísel méně, je zřejmé, že některá vazba nebude potřebná. I tyto úlohy jsou didakticky zajímavé, protože právě ony jsou vhodné pro slabší žáky. K takovým náleží například níže uvedená úloha 2.

[14] V následujícím textu budeme k vizualizaci používat zejména graf úlohové situace se zvýrazněnými zadanými hodnotami a graf procesu řešení.

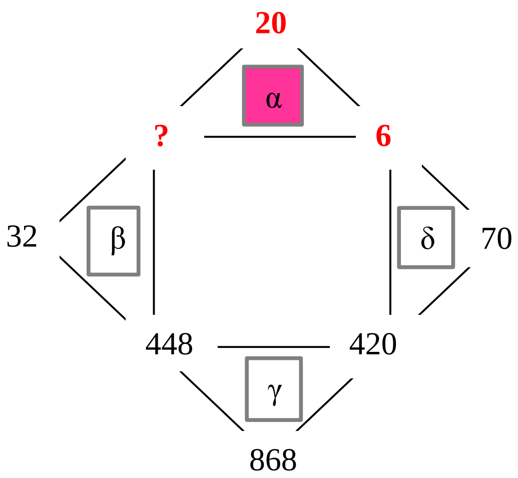
Nyní se zaměříme na ty modifikované úlohy, ve kterých jsou právě čtyři čísla utajena. Vzniká otázka, zda lze utajit libovolnou čtveřici čísel. Pokud by tomu tak bylo, nabízela by tato úlohová situace celkem $\binom{8}{4} = 70$ modifikovaných úloh. Toto ale neplatí, protože pokud by například byla utajena čísla V_1, V_2, V_3 a V_4, pak by čísla P_1, P_2, P_3 a V_5 byla dána. Ovšem čísla P_1, P_2, P_3 jsou vázána, tedy kdybychom je zadali například takto: $P_1 = P_2 = P_3 = 5$, pak by úloha neměla žádné řešení. Z uvedeného tedy plyne, že ne každá čtveřice objektů může být utajena. Čtveřice daných objektů musí být *nezávislá,* tj. z žádné trojice těchto objektů není možné vypočítat čtvrtý objekt pomocí uvedených čtyř vazeb úlohové situace.

Ilustrace modifikovaných úloh

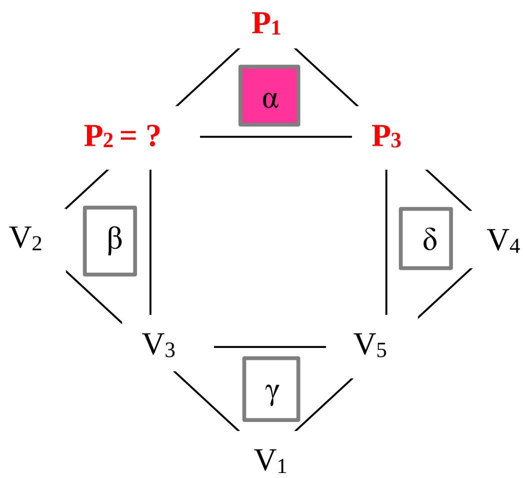
Ukázali jsme, jak lze s úlohovou situací pracovat. Nyní budeme ilustrovat konkrétní modifikované úlohy. První dvojice je určena velmi slabým žákům.

Úloha 2a:

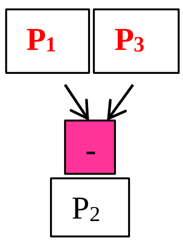
Nakoupili jsme 20 míčů. Velkých míčů jsme koupili 6. Zbytek byly malé míče. Kolik malých míčů jsme koupili?



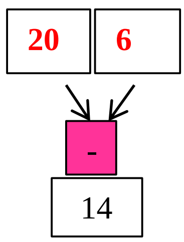
Obr. 3.8



Obr. 3.9



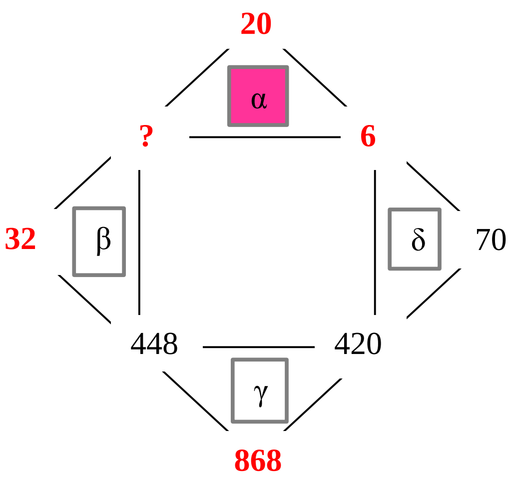
Obr. 3.10



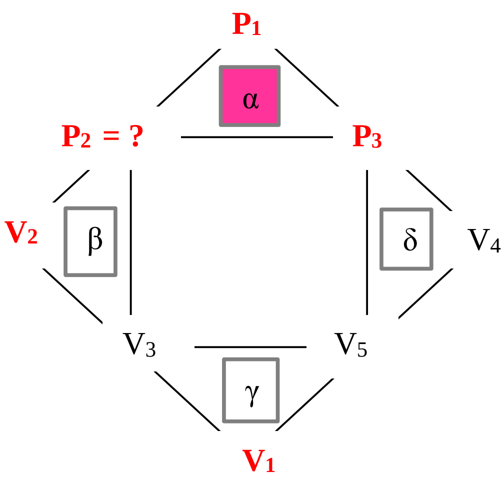
Obr. 3.11

Úloha 2b:

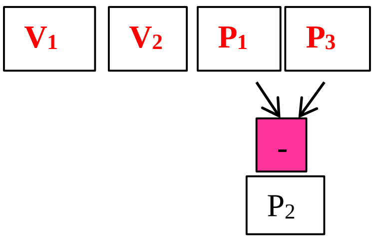
Nakoupili jsme 20 míčů za 868 Kč. Malý míč stál 32 Kč. Velkých míčů jsme zakoupili 6. Kolik malých míčů jsme koupili?



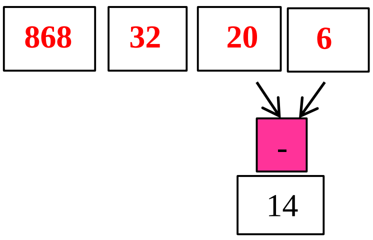
Obr. 3.12



Obr. 3.13



Obr. 3.14

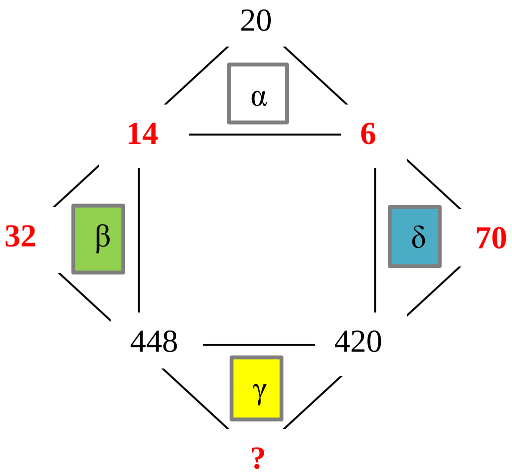


Obr. 3.15

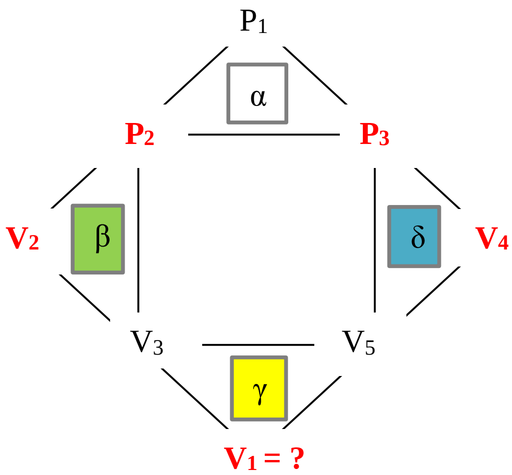
Úlohu 2a vyřeší již žáci na konci prvního ročníku. Úloha 2b, i když je nakonec výpočetně stejně náročná jako úloha 2a, se liší náročností uchopení. Nadbytečné informace V_1 a V_2, tedy celková částka a částka za jeden malý míč, které jsou navíc dány velkými čísly, dělají úlohu 2b pro žáka prvního ročníku neuchopitelnou nebo dokonce nesrozumitelnou. Odfiltrovat nadbytečné informace bývá někdy náročné i pro žáka pátého ročníku. Z didaktického hlediska je rozumné takovéto úlohy žákům zadávat, neboť pomáhají zvyšovat schopnost tyto úlohy uchopovat a číst text (nejen v matematice) s porozuměním.

Úloha 3:

Honza koupil 14 malých míčů po 32 Kč a 6 velkých míčů po 70 Kč. Kolik za ně zaplatil?

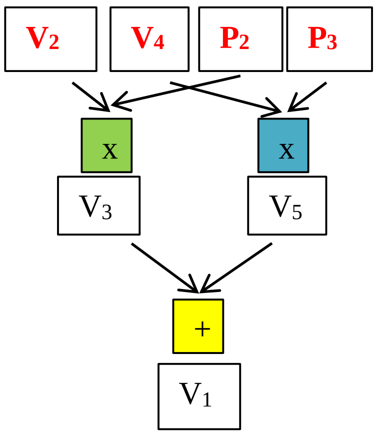


Obr. 3.16

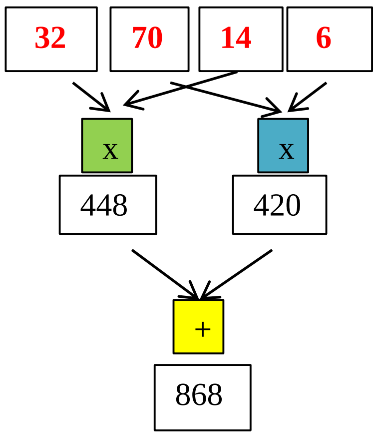


Obr. 3.17

Graf procesu řešení úlohy 3 je na následujících obrázcích 3.18 a 3.19.



Obr. 3.18

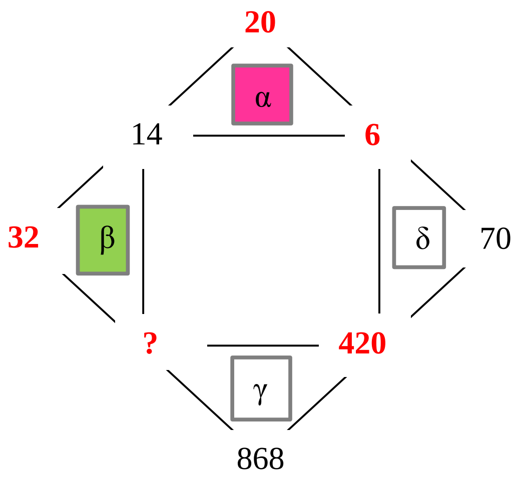


Obr. 3.19

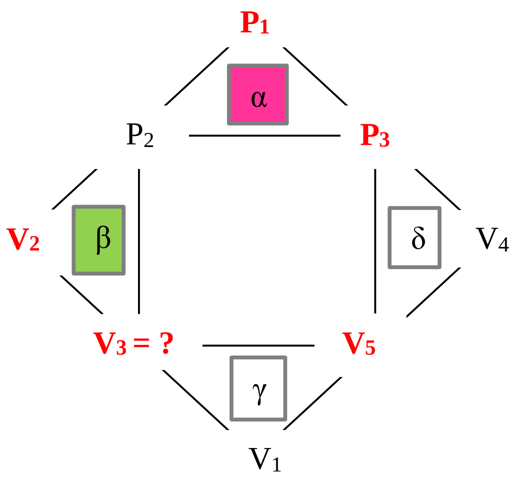
V uvedené úloze jsou dány stavy P_2 a P_3, veličiny V_2 a V_4. Žák hledá pouze veličinu V_1. Řešitelská strategie je v tomto případě jednoduchá, hledaná veličina V_1 je součtem dvou dílčích veličin V_3 a V_5. Ty se zjišťují totožným postupem. Dvakrát se tedy opakuje výpočet „cena kusu krát počet kusů = celková cena“, který není myšlenkově náročný zejména proto, že je ve slovních úlohách často frekventován. Tento spoj označujeme jako idiom. K řešení úlohy tedy vedou dvě násobení a jedno sčítání.

Úloha 4:

Koupili jsme 20 míčů, z toho 6 bylo velkých. Za tyto velké míče jsme zaplatili 420 Kč. Kolik jsme zaplatili za malé míče, když jeden stál 32 Kč?

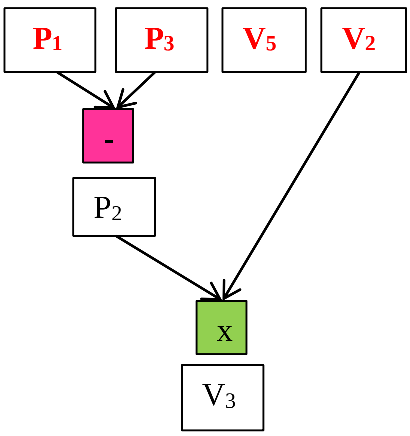


Obr. 3.20

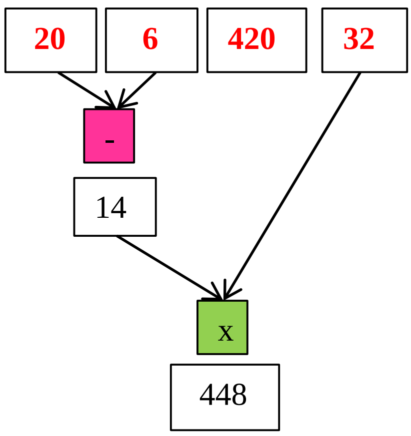


Obr. 3.21

Graf procesu řešení úlohy 4 je na následujících obrázcích 3.22 a 3.23.



Obr.3.22

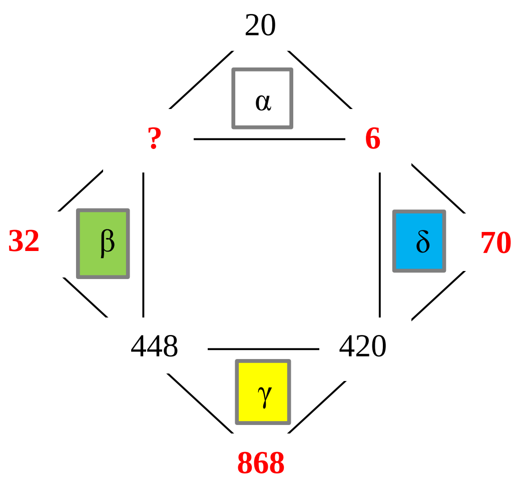


Obr. 3.23

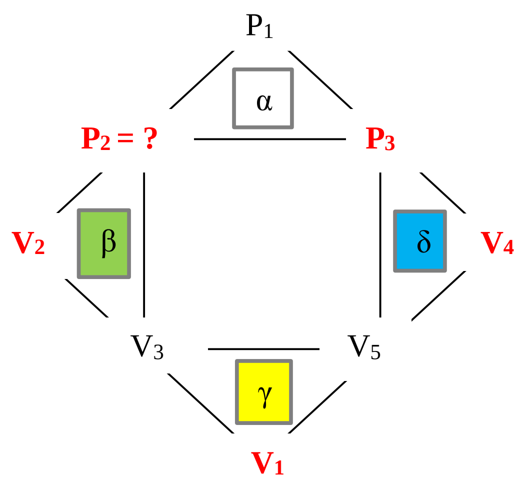
Zvyšuje se náročnost na strategii řešení. Hledaná veličina V_3 se získá z dané veličiny V_2 a zatím neznámého počtu P_2 jejich vzájemným vynásobením. Počet P_2 získáme z daných počtů P_1 a P_3 odčítáním. Obtížnost úlohy zvyšuje také nadbytečná informace, která znesnadňuje uchopování úlohy. Jedná se o částku zaplacenou za velké míče V_5.

Úloha 5:

Za nákup velkých a malých míčů jsme zaplatili 868 Kč. Koupili jsme 6 velkých míčů po 70 Kč a několik malých míčů po 32 Kč. Kolik malých míčů jsme koupili?

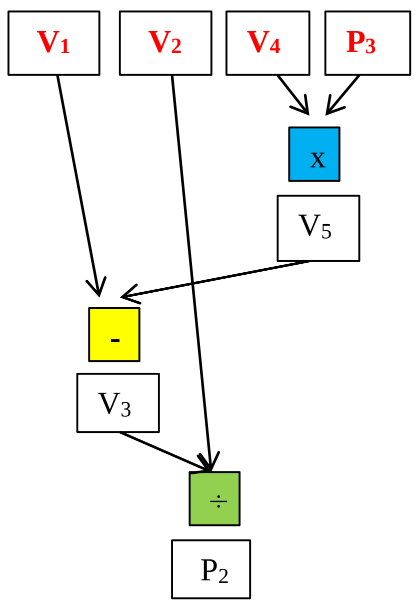


Obr. 3.24

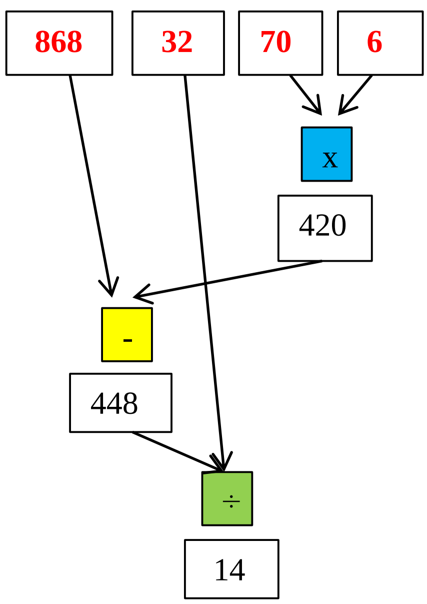


Obr. 3.25

Graf procesu řešení úlohy 5 je na následujících obrázcích 3.26, 3.27.



Obr. 3.26



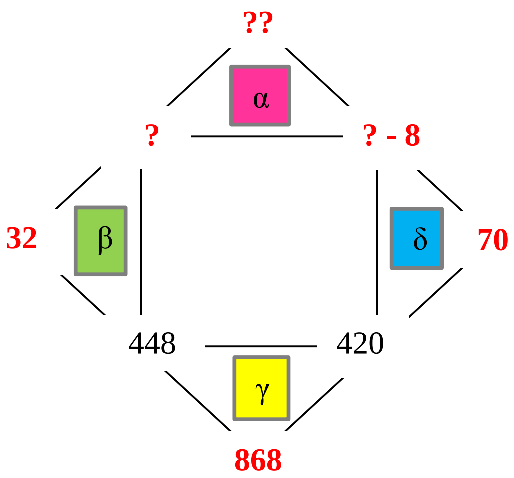
Obr. 3.27

Řešitelská strategie je opět náročnější, je již trojstupňová. V prvním kroku je násobením veličiny V_4 a počtu P_3 nalezena veličina V_5, tedy částka zaplacená za velké míče. Ve druhém kroku je odčítáním dané veličiny V_1 a již nalezené veličiny V_5 získána veličina V_3, částka zbývající na malé míče. Konečně ve třetím kroku je dělením právě získané veličiny V_3 zadanou veličinou V_2 nalezen hledaný počet, tedy P_2.

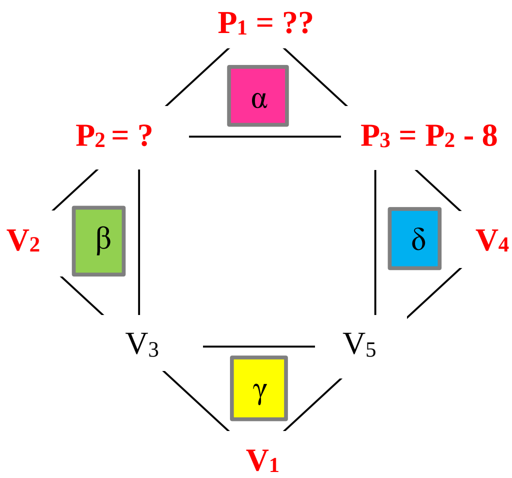
Pro zdatné žáky může učitel z popsané úlohové situace vytvořit náročné úlohy i za pomoci doplňujících objektů. Příkladem takové úlohy je následující úloha 6.

Úloha 6:

Honza koupil několik malých míčů po 32 Kč a o 8 méně velkých míčů po 70 Kč. Celkem za míče zaplatil 868 Kč. Kolik míčů koupil?



Obr. 3.28



Obr. 3.29

V této úloze jsou dány veličiny V_1, V_2, V_4 a počet $P_2 - P_3$, který zde vystupuje jako doplňující objekt. Řešitelská strategie vyžaduje uchopení obou dílčích výpočtů (pro malé i pro velké míče) v jednom vztahu, který při použití jazyka písmen vede na rovnici $32x + 70(x - 8) = 868$. Zde $x = P_2$. Žáci na prvním stupni ovšem jen výjimečně vládnou jazykem písmen, tudíž jejich hlavní řešitelskou strategií bývá pokus – omyl. Najít výsledek touto metodou je dosti pracné a časově náročné, ale edukačně účinné. Žák zkusmo zvolí $x = 10$ a najde výsledek 460. Zvýší odhad, zkusí $x = 15$. Výsledek 970 je již nadějnější, ovšem příliš velký. Zkusí tedy $x = 14$ a nalezne řešení. Žák, který postupuje popsaným způsobem, provede 6 násobení a 3 sčítání, což je přijatelné. Žák, který postupuje méně chytře, se napočítá více, ovšem právě tím získává zkušenosti, které mu v budoucnu dovolí postupovat efektivněji.

Další možností, jak s úlohovou situací pracovat, je zachovat čísla, ale převést úlohu do jiného sémantického kontextu, např. nepracovat s míči, ale s jiným objektem. Žák má zkušenosti z dané úlohy, ale v jiném sémantickém prostředí souvislosti nemusí vidět. Ideální je volit taková prostředí, která jsou genderově nespecifická (zejména při testování), jelikož motivační síla jednotlivých kontextů může být různě silná.

Ukázali jsme, jak ze slovní úlohy vytvořit úlohovou situaci s následnými modifikacemi lehkých i náročných úloh. Nyní se vrátíme k naší úloze 1.

Matematická analýza úlohy 1[15]

Myšlenkově nejsnadnější je poznání, že P_3 jako komplement k P_2 v P_1 lze získat odčítáním. Odhalení výpočtu $V_3 = P_2 \times V_2$ je snadné, protože podobných vazeb žák již viděl nejen ve škole, ale i v životě mnoho. V tomto stádiu řešení dochází k rozhodování u těch řešitelů, kteří nevidí celý řešitelský proces najednou: mají možnost dále počítat to, co ze získaných dat vypočítat lze, nebo hledat cestu k odhalení hledaného čísla V_4. Druhá z těchto cest někdy vede ke kolapsu celého procesu. Žák, který zjistí veličinu V_5 má již vysokou šanci úlohu vyřešit, neboť poslední krok je pouze inverzní postup kroku již udělaného. Obě aditivní operace, které řešitel dělá, jsou snadné. V obou případech jde o odčítání, jehož sémantický význam je komplement; jednou jde o vyjádření počtu, podruhé veličiny (korun). Dvě multiplikativní operace jsou různé. Operace P_2, $V_2 \rightarrow V_3$ je násobení, ale vzhledem k tomu, že obě veličiny mají stejnou kvalitu (jsou to koruny), je počet P_2 často vnímaný jako skalár, tedy operátor porovnání (násobení). Operace P_3, $V_5 \rightarrow V_4$ je dělení a situace je inverzní k té předešlé.

Didaktická analýza úlohy 1[16]

První a nejnáročnější řešitelský krok u slovní úlohy je její uchopení. Některý žák je schopen vytvořit si jasný obraz o objektech i vazbách úlohy a vidět předem celý řešitelský postup. Jiný se spokojí s postupným zjišťováním dat, podle etapového grafického záznamu. Když takový žák v řešení ustrne, je nutno zjistit lokalitu překážky (obstaklu), hledat příčinu toho, proč k ustrnutí došlo a způsoby reedukace. Jeden z účinných způsobů reedukace je rozklad dané úlohy na dvě nebo více podúloh, pomocí kterých vedeme řešitele k výsledku, aniž by on sám musel úlohu uchopovat. Tento rozklad je možné svěřit některému spolužákovi.

Další didaktický problém, který je spojen s uchopováním úlohy, spočívá v dezinterpretaci zadání. Jestliže nová interpretace žáka dává smysl a je řešitelná, je rozumné nechat žáka úlohu vyřešit a pak výsledek konfrontovat s původním textem úlohy. Když je nová interpretace úlohy zmatená a nevede k žádnému řešitelskému procesu, je rozumné původní text úlohy větu po větě diskutovat ve skupince žáků.

[15] graf procesu řešení úlohy 1 viz. obr. 3.5 a 3.6

[16] většina z uvedeného platí obecně, nejen u této úlohy, více viz. podkapitola 2.5

4 Vlastní výzkum a analýza získaných dat

Naším původním výzkumným záměrem bylo dlouhodobé shromažďování žákovských řešení různých slovních úloh a jejich následná komparace, zejména s důrazem na řešitelské strategie a jejich vývoj u jednotlivých žáků. Sběr materiálu probíhal na počátku pouze ve dvou čtvrtých třídách, kde jsem vyučovala matematiku. Naše databáze řešení získávala poměrně rychle na objemu a prvotní záměr se ukázal býti nereálný pro možnosti jednoho člověka, zvláště z časových důvodů. Proto jsme se rozhodli vybrat z širokého spektra řešených úloh pouze jedinou. Jako ta nejhodnotnější se jevila právě řešení úlohy 1, kterou jsme detailně zpracovali po stránce matematické i diagnostické v části 3.5. Tato jediná úloha nám poskytla dostatečně široké možnosti pro realizaci následných experimentů, které budou podrobně popsány dále.

Nyní pouze stručně: Úlohu 1 jsme zadali v dubnu roku 2014 ve dvou čtvrtých třídách, které byly v aktuálním ročníku vedeny konstruktivisticky (experiment E1). V tomto experimentu jsme chtěli jednak lokalizovat nejnáročnější partii úlohy, jednak vytvořit systém organizace zanalyzovaných řešení. Nabízela se také komparace dvou paralelních tříd jako celků a ověření, zda se mezi nimi projeví výraznější rozdíly i přesto, že jsou vedeny stejným způsobem a stejným učitelem (mnou). Rovněž jsme si položili otázku, jak úspěšní budou žáci vedení konstruktivisticky po celou dobu dosavadní školní docházky proti žákům vedeným transmisivně.

Na experiment E1 navázal experiment E2, ve kterém jsme úlohu 1 zadali rovněž ve dvou čtvrtých třídách (v dubnu roku 2015), ovšem vyučovaných po celou dobu tradičním způsobem, transmisí. Při analyzování řešení těchto žáků se opakovaně objevovaly jisté fenomény, zejména realizace tradičního slovního zápisu a s tím související použití algebraického vyjádření pro neznámou. Tak vysoká četnost těchto jevů nás inspirovala k experimentu E3. Slovní úlohu 1 jsme upravili po stránce struktury textového zadání, záměrně přesunuly vybrané informace na jinou pozici či odstranili idiom. V tomto šetření jsme sledovali, jakým způsobem se tato změna promítne do řešitelské úspěšnosti.

V experimentu E4, jež proběhl v dubnu roku 2015 v mých třídách, jsme zjišťovali vliv kalkulátorů na psychiku žáků a jejich dopad na řešitelskou úspěšnost.

4.1 Experiment E1:
Úloha 1 v konstruktivisticky vedených třídách

4.1.1 Příprava a realizace E1

Cíl

Náš první experiment jsme zaměřili na porovnání žákovských řešení úlohy 1 ve třídách vedených konstruktivistickými přístupy. Zajímaly nás odlišnosti v úspěšnosti strategické i numerické v jednotlivých vazbách dané úlohy. Cíle tohoto experimentu byly následující:

- Komparace všech získaných dat a jejich organizace
- Vzájemná komparace tříd jako dvou celků
- Komparace žáků vedených konstruktivisticky po celou dobu školní docházky s žáky vedenými konstruktivisticky pouze v aktuálním školním roce

Cílová skupina

Danou úlohu 1 jsme předložili v dubnu roku 2014 dvěma 4. ročníkům, ve kterých jsem vyučovala matematiku. Obě třídy byly velmi početné (4. A 32 žáků, 4. B 30 žáků), shodně v nich byli přítomni žáci vedeni konstruktivisticky od první třídy. Ve 4. A úlohu řešilo 28 žáků, z nichž 10 patřilo mezi mé původní žáky (tedy učila jsem je rovněž před spojováním, v období 1. – 3. třídy), ve 4. B řešilo úlohu 1 celkem 27 žáků, z nichž 8 patřilo mezi mé původní žáky. Celkem úlohu řešilo 55 žáků, z nichž 18 prošlo konstruktivistickou výukou od první třídy, zbývajících 37 žáků bylo vedeno tradičním způsobem.

Forma práce, způsob zadání

Žáci pracovali individuálně na samostatný papír s úlohou zadanou následujícím způsobem: Úloha byla napsána na tabuli, žáci měli možnost sami si rozhodnout, zda si zadání opíší, vytvoří zápis, vypíší si pouze vybrané informace nebo budou ke své práci využívat zadání z tabule. Žáci byli informováni, že se nejedná o test.

Způsob sběru dat

Data byla tvořena sebranými žákovskými řešeními. Hodina nebyla dokumentována prostřednictvím videonahrávky z důvodu nesouhlasu několika rodičů. Nebyl přítomen externí pozorovatel.

4.1.2 Analýza dat, způsob evidence

Všechna získaná řešení jsme opakovaně analyzovali a sledovali chyby, kterých se žáci dopouštěli. Zajímalo nás, v jaké fázi řešitelského procesu chyby vznikají, ve kterých vazbách v procesu řešení chybují (strategiky, numericky) žáci nejčastěji a zda se některé konkrétní chyby objevují ve třídě opakovaně. Pro usnadnění a přehlednost bylo nutné vytvořit jednotný systém evidence. Po mnoha verzích záznamových archů vykrystalizovala tabulka (viz Příloha 1, Příloha 2), do níž jsme zapisovali následující údaje:

- vstup do vazby
- provedení vazby
- strategická správnost
- numerická správnost
- výstup z vazby
- poznámky, komentáře žáka

Naši úlohu 1 tvořily čtyři vazby o různé náročnosti. Vzhledem ke skutečnosti, že řešení této úlohy probíhalo ve třech úrovních, považovali jsme za nutné zohlednit vstup do konkrétní vazby – zda je správný, nebo naopak s chybou. Vazby α a β tvořily první úroveň řešitelského procesu, proto nemohl být vstup do těchto dvou vazeb s chybou přenesenou z předchozího kroku řešení (z tohoto důvodu jsou tato pole v tabulce vždy proškrtnuta). Jiná situace ovšem mohla nastat ve vazbách γ a δ, závislých na správném výpočtu právě vazeb α a β. Pokud tedy žák vyřešil vazbu α numericky špatně, přenesla se tato chyba nutně do výpočtu vazby δ, která ale mohla být žákem uchopena strategicky zcela správně. Jelikož chyby v numerice považujeme za méně závažné, než chyby strategické, zohledňujeme tento jev v našich analýzách.

Provedením vazby rozumíme to, zda žák vazbu realizuje pouze mentálně a její výpočet tudíž není součástí písemného řešení, nebo zda je tento krok řešitelem písemně evidován. U mentálního provedení můžeme pouze usuzovat na strategickou správnost provedení, jejím potvrzením je ovšem numerika. U písemného provedení si všímáme, jakým způsobem si žák vazbu eviduje – vedle sebe, pod sebe (a řeší ji příslušným algoritmem).

Jak jsme již zmiňovali výše, je pro nás důležité odlišit chyby vzniklé ve strategii a v numerice. Chybám numerickým přikládáme menší váhu, proto je rozlišujeme i v žákovských řešeních. Pod strategickou správností rozumíme takové uchopení vazby, které odpovídá kontextu úlohy a to nejen číselně, ale i operačně. Numerická správnost je záležitostí kalkulu.

V okamžiku vyřešení vazby můžeme rozlišovat trojí výstup, a to buď správný výstup, výstup s chybou, nebo odpověď, u které konkrétně sledujeme její formální a numerickou správnost. Pod formální správností rozumíme takovou formulaci, která odpovídá na otázku položenou v zadání slovní úlohy. Numerická správnost poukazuje na správně doplněný číselný údaj do odpovědi.

Průběh řešitelského procesu některých žáků, zajímavosti a komentáře jsme evidovali v poznámkách. V některých řešeních nebylo možné zcela jednoznačně určit výše popsané aspekty, proto jsme v těchto případech sporná místa označili otazníkem a uvedli konkrétně tyto části do poznámky.

4.1.3 Komparace všech sebraných dat a jejich organizace

Na základě analýz řešení jsme vytvořili následující kategorizaci:

- **I. Řešení zcela správná strategicky i numericky**
- **II. Správná a úplná řešitelská strategie s numerickou chybou**
- **III. Neúplná nebo chybná řešitelská strategie**
- **IV. Absence řešitelského procesu**

Tyto hlavní kategorie jsme zkoumali podrobněji. Nejvíce nás zajímala kategorie II, zejména příčina chyb a jejich lokalizace. Proto jsme vytvořili (na základě ukončených analýz několika řešení) další členění do dílčích podkategorií a to následujícím způsobem:

- II.a Jeden výpočet chybný a výsledek se zbytkem, který je zohledněn v odpovědi
- II.b Jeden výpočet chybný a výsledek se zbytkem, který není zohledněn v odpovědi
- II.c Jeden výpočet chybný a výsledek beze zbytku
- II.d Dva výpočty chybné a výsledek se zbytkem, který není zohledněn v odpovědi
- II.e Chyba v přepisu čísla

Dále uvedeme k jednotlivým kategoriím souhrn našich zjištění v podobě tabulkového zpracování sledovaných jevů (vyjádřených početně i procentuálně), připojujeme rovněž konkrétní ukázky vybraných žákovských řešení[17] s analýzou a didaktickými komentáři.

[17] jména žáků neodpovídají z bezpečnostních důvodů skutečnosti

I. Řešení zcela správná strategicky i numericky

Do této kategorie náleží 22 řešení z celkových 55 (40 %).

Evidence zadání:

Dva žáci z této kategorie se rozhodli pro přesné opsání zadání úlohy, dva žáci si poznamenali pouze vybrané informace ze zadání, které považovali za důležité pro své řešení.

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb:

<table>
<tr><th colspan="2">Provedení
celkem 22 žáků</th><th colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</th><th colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</th><th colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</th><th colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</th></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">9</td><td>9</td><td rowspan="2">22</td><td>0</td><td rowspan="2">20</td><td>3</td><td rowspan="2">22</td><td>5</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0</td><td>22</td><td>17</td><td>17</td></tr>
</table>

Tab. 4.1

<table>
<tr><th colspan="2">Provedení (v %)
celkem 22 žáků</th><th colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</th><th colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</th><th colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</th><th colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</th></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">59 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">9 %</td><td colspan="2">0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">41 %</td><td>41 %</td><td rowspan="2">100 %</td><td>0 %</td><td rowspan="2">91 %</td><td>14 %</td><td rowspan="2">100 %</td><td>23 %</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0 %</td><td>100 %</td><td>77 %</td><td>77 %</td></tr>
</table>

Tab. 4.2

Z tabulky vyplývá, že mentálně žáci nejčastěji řešili vazbu α, což přisuzujeme její numerické nenáročnosti. Proti tomu vazba β a δ byla žáky evidována pouze písemně. Vazbu β žáci řešili výhradně dle algoritmu písemného násobení dvojciferným činitelem, vazbu δ provedlo 16 žáků písemně dle algoritmu písemného dělení (tedy se sepisováním zbytků) a 5 žáků využilo provázanosti na malou násobilku (odmysleli si nulu, tudíž řešili výpočet 42 : 6 = 7 a k podílu přidali 0).

V 11 řešeních se objevily všechny čtyři výpočty vedoucí ke zjištění hledaných objektů a veličin, v 10 případech žáci evidovali tři výpočty (všichni shodně vypustili evidenci výpočtu vedoucí ke zjištění P_3, tedy 20 – 14 = 6) a 1 žák vedl evidenci velmi úsporně, zaznamenal pouze dva výpočty a to ke zjištění V_3 (32 × 14 = 448) a V_4 (420 : 6 = 70). Jedna žákyně použila ve svém řešení rozklady a komentáře. Toto řešení nám připadalo natolik zajímavé, že jej uvádíme níže (viz řešení Anety).

Jedenkrát jsme analyzovali špatný matematický zápis ve smyslu nekorektního použití rovnítka (868 – 448 = 420 : 6 = 70). Tento případ obecně není v žákovských řešeních ojedinělý, žák zaznamenává tok svých myšlenek do jedné řádky a nebere v potaz chybné použití rovnosti. Je důležité, aby učitel na tuto nekorektnost žáky upozorňoval.

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb:

Správnost celkem 21 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	22	22	22	22
numerická	22	22	22	22

Tab. 4.3

Správnost (v %) celkem 21 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	100 %	100 %	100 %	100 %
numerická	100 %	100 %	100 %	100 %

Tab. 4.4

Veškeré vazby byly všemi žáky řešeny správně po stránce strategické i numerické.

Vizualizace, ilustrace:

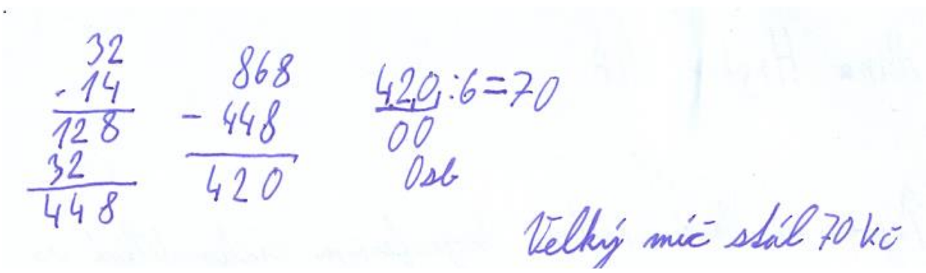
Jedno řešení obsahovalo ilustraci dvou míčů (žák chtěl buď učinit své řešení zajímavější, nebo se nudil, obr. 4.4), jedno řešení bylo zajímavé po stránce vizuální (viz. řešení Anety, obr. 4.2).

Slovní odpověď:

Slovní odpověď uvedli všichni žáci, v jednom případě napsal žák za odpověď otazník. Je možné, že tím naznačoval nejistotu vlastního řešení, ovšem, mohlo se také jednat o gramatickou chybu z nepozornosti.

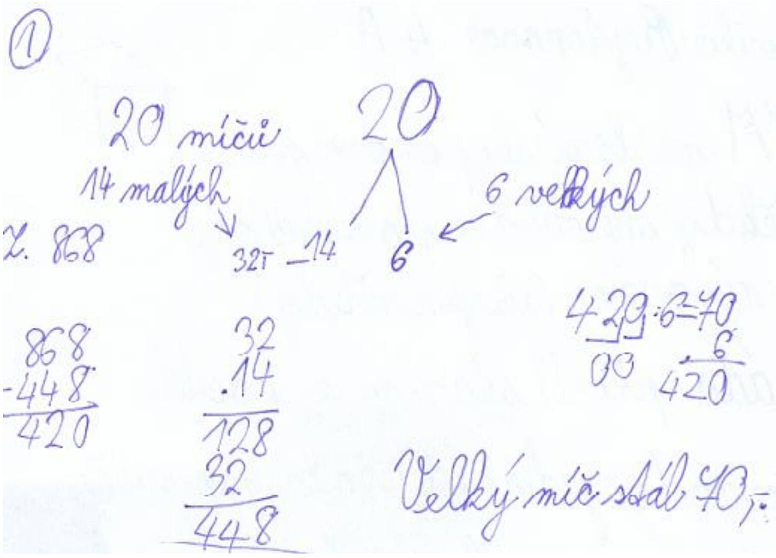
Ukázky vybraných řešení:

Řešení Aleny *(Obr. 4.1)* Záznam neuvádí žádné prvky uchopování úlohy. Žákyně jde přímo na výpočty, které jsou řízeny řešitelskou strategií, jež byla vložena do krátkodobé paměti: „Najdu, kolik se zaplatilo za malé míče, pak zjistím, kolik se zaplatilo za velké míče a pak tento výsledek vydělím číslem 6.“ (tento výpočet proběhl určitě již během uchopování úlohy) Tři výpočty dělá dívka písemně, jeden mentálně. Ze záznamu je zřejmé, že pořadí hledaných objektů je: V_3 (násobením), V_5 (odčítáním) a V_4 (dělením), když dříve mentálně zjistila, že $P_3 = 6$. Z grafického projevu je jasné, že dívka po přečtení zadání ihned úlohu uchopila a našla řešitelský postup, který poté čistě realizovala.



Obr. 4.1

Řešení Anety *(Obr. 4.2)* Záznam ukazuje na dvě etapy řešitelského procesu. Horní část je věnována uchopování úlohy (dívka si sjednává vhled do situace), dolní část pak vlastnímu řešení. Jakmile zapíše, že z 20 míčů jich bylo 14 malých, ihned přechází z uchopování do etapy řešitelské. Vizuálně výrazně pomocí „vidličky“ vypočítává, že velkých

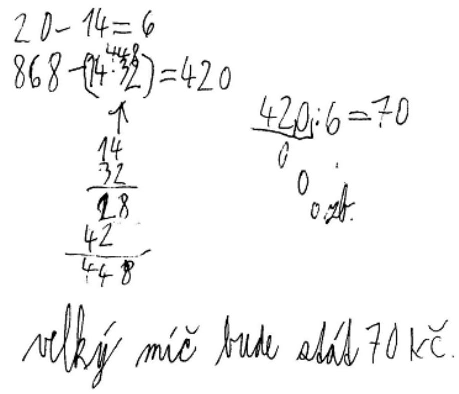


Obr. 4.2

míčů je 6. Pak si doplní poslední dva údaje. K číslu 868 následně připíše Z, což vysvětlujeme jako „zaplatili“. Číslo 32 je graficky propojeno šipkou na objekt „14 malých“ a je u něj uveden znak pro vyjádření částky. Po uvedeném uchopení úlohy přechází dívka k vlastnímu řešení. To zahájí operací násobení 32 krát 14 v místě, které ukazuje zápis z uchopení. Pokračuje vlevo od tohoto výpočtu nalezením čísla 420 a končí dělením 420 : 6 na pravé straně, která byla při uchopování určena velkým míčům. Neopomine udělat zkoušku po výpočtu podílu. Žáci tohoto typu, jako je Aneta, jsou velmi dobří učitelé slabších žáků, jelikož sami mají potřebu vysvětlovat své řešitelské kroky. Tímto vysvětlováním lépe pronikají do řešitelského procesu. Pokud by tato žákyně úlohu někomu vykládala, opět by použila k uchopování jakousi vizualizaci, která ale bude přehlednější a kultivovanější, než ta, kterou jsme uvedli zde.

Porovnání postupů Aleny a Anety:

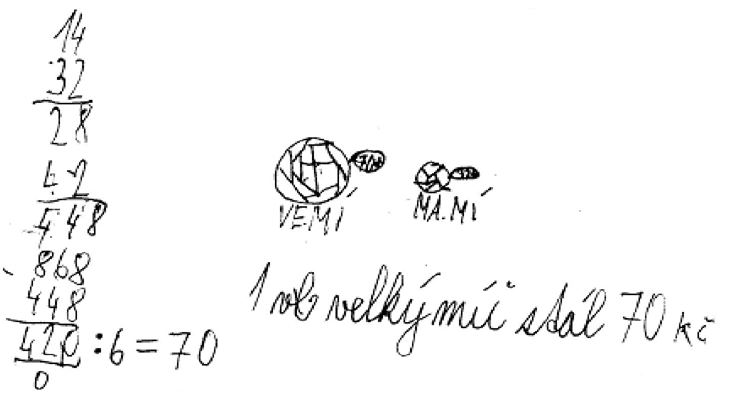
Hlavní rozdíl obou řešení spočívá v etapě uchopování. Zatímco u Aleny proběhla tato fáze pouze mentálně a dívka měla strategii řešení uloženu v krátkodobé paměti, Aneta potřebovala celé uchopení vizualizovat. To nám ukazuje, že z hlediska náročnosti je úloha 1 pro Anetu přiměřená, ale pro Alenu nejspíš příliš lehká. Učitel by mohl této dívce zadat například úlohu 5 nebo 6 uvedenou v 3.5.2.



Obr. 4.3

Řešení Lukáše *(Obr. 4.3)* Lukášovo řešení je zajímavé propojením vazeb β a γ do jedné rovnice. Tento krok ukazuje na kvalitní uchopení úlohy a zkušenost žáka s řešením podobných, víceúrovňových úloh. Lukáš má potřebu evidence, ale zároveň se snaží o jistou úsporu záznamu. Je zvláštní, že výpočet vazby α eviduje písemně, ačkoliv je numericky velmi snadný.

Řešení Jakuba *(Obr. 4.4)* Jakubovo řešení nás zaujalo svou vizuální podobou, kdy je celý řešitelský proces zaznamenán plynule pod sebe. Písemné násobení je zapsáno chybně (neodpovídá pozice řádů), přesto je součin správný. Zajímavostí je i to, že pouze v tomto řešení se objevila ilustrace základních objektů úlohy, u nichž je udaná i jejich cena. Tu řešitel dle našeho úsudku dopisoval až po vyřešení úlohy. Ilustrace zde tedy plní funkci potvrzení odpovědi.



Obr. 4.4

II. Správná řešitelská strategie s numerickou chybou

Do této kategorie patří 12 řešení z 55 (22 %), která jsme z důvodu odlišností dále třídili do specifičtějších podkategorií.

Vzhledem k nízkým četnostem výskytu řešení v jednotlivých podkategoriích uvedeme souhrnná zjištění (tabulková) pouze za celou hlavní kategorii.

Evidence zadání:

Tři žáci opsali zadání přesně, dva provedli evidenci vybraných údajů, jeden žák se rozhodl po opsání prvního slova ze zadání, načež tuto činnost ukončil a slovo škrtl.

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb:

Provedení celkem 12 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		6		0		1		0	
písemně	vedle sebe	6	6	12	1	11	5	12	0
	pod sebe		0		11		6		12

Tab. 4.5

<table>
<tr><th colspan="2">Provedení (v %)
celkem 12 žáků</th><th colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</th><th colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</th><th colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</th><th colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</th></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">50 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">8 %</td><td colspan="2">0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">50 %</td><td>50 %</td><td rowspan="2">100 %</td><td>8 %</td><td rowspan="2">92 %</td><td>42 %</td><td rowspan="2">100 %</td><td>0 %</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0 %</td><td>92 %</td><td>50 %</td><td>100 %</td></tr>
</table>

Tab. 4.6

I v této kategorii byla mentálně nejčastěji řešena vazba α. Rovněž ostatní vazby jsou ve svém písemném řešení blízké řešitelům z kategorie I. Šest žáků provedlo písemnou evidenci všech vazeb, ve čtyřech řešeních byla shodně vypuštěna vazba α, v jediném případě žák evidoval pouze vazbu β a δ.

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb:

Správnost celkem 12 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	12	12	12	12
numerická	10	7	8 (2 přepis)	12

Tab. 4.7

Správnost (v %) celkem 12 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	100 %	100 %	100 %	100 %
numerická	83 %	58 %	67 %	100 %

Tab. 4.8

K numerické chybě docházelo nejčastěji ve vazbě β, což odpovídá její početní obtížnosti. Výraznější pokles v numerice vidíme dále u vazby γ, přičemž zde došlo u dvou žáků k chybě z nepozornosti (přepis čísla).

Vizualizace, ilustrace:

Neobjevily se.

Slovní odpověď:

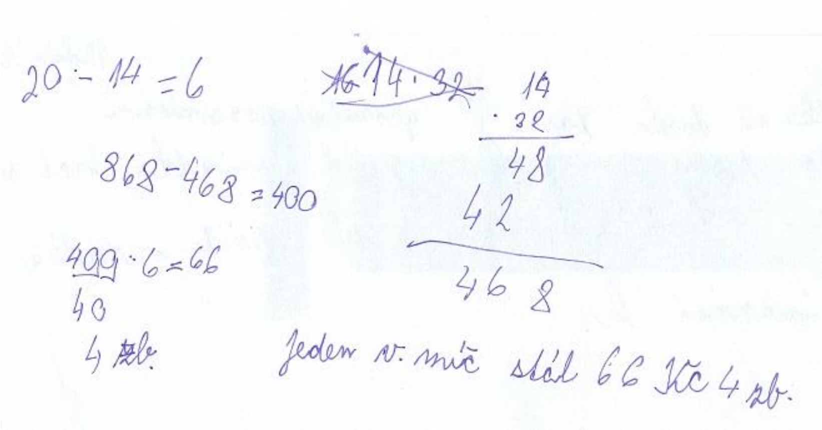
Všichni žáci správně formulovali a zapsali odpověď. Odlišnosti v této kategorii způsobil neúplný podíl, který vyšel deseti žákům po vypočítání vazby δ. Jedna žákyně jej zakomponovala do své odpovědi v podobě zbytku (viz. řešení Terezy, *obr. 4.5*), u jiné žákyně proběhla snaha zbytek interpretovat pomocí haléřů (viz. řešení Dity, *obr. 4.13*).

Dále prezentujeme jednotlivé podkategorie, uvádíme zejména zajímavé ukázky řešení a jejich analýzy.

II.a Jeden výpočet chybný a výsledek se zbytkem, který je zohledněn v odpovědi

Do této podkategorie zahrnujeme 1 řešení z 12 (8 %).

Řešení Terezy *(Obr. 4.5)* U této řešitelky spatřujeme evidenci všech vazeb vyskytujících se v úloze. Myšlenkový proces začal vazbou α a pokračoval k řešení vazby β, ve které došlo k chybě. Zapsala číslo 16, které ale záhy škrtla. Správnou úlohu si Tereza nejprve zapsala do řádku, poté opět škrtla. Pravděpodobně v tu chvíli došlo k vlastnímu uvědomění, že takovýto součin musí řešit písemným násobením, proto následně postupovala dle algoritmu písemného násobení pod sebou. V součinu jí vznikla hned v první řádce chyba, která mohla být způsobena horší čitelností číslic (u číslice 3, kterou mohla zaměnit za 2 a poté řešit součin dvou dvojek vedle sebe), k chybě došlo i v následujícím řádku. Vazba byla tedy vyřešena s chybou, která se přenesla do dalších etap řešitelského procesu. Neúplný podíl nefungoval jako upozornění na možnou přítomnost chyby, přesto tato řešitelka jako jediná ze všech, kterým rovněž vyšel zbytek, jej evidovala v totožném tvaru ve své odpovědi.



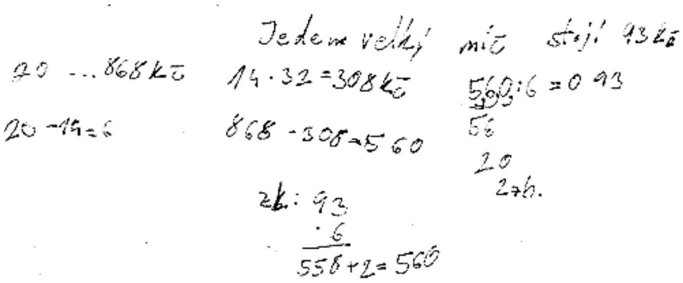
Obr. 4.5

II.b Jeden výpočet chybný a výsledek se zbytkem, který není zohledněn v odpovědi

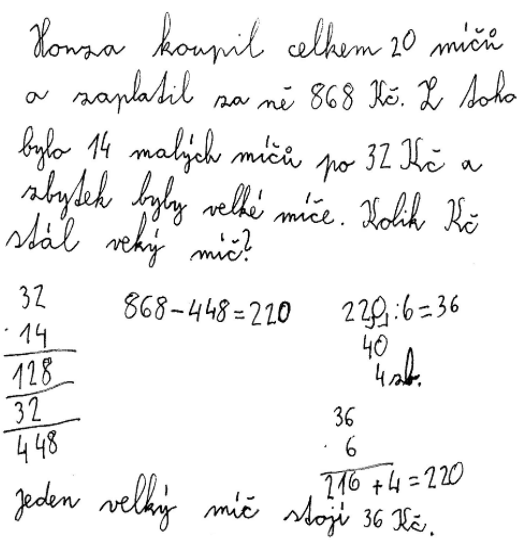
Do této kategorie náleží 5 řešení z 12 (42 %). Všem těmto žákům vycházel shodně při výpočtu vazby δ zbytek, který mohl působit jako signál chyby. Tento efekt jsme neevidovali při našich analýzách, žáci považovali úlohu za vyřešenou a zbytek žádným způsobem nezohlednili v odpovědi.

Řešení Jany *(Obr. 4.6)*

Jana zahájila řešitelský proces přesným opsáním zadání (neuvádíme). Poté si pravděpodobně chtěla vypsat klíčové údaje ze zadání, to ovšem ukončila po evidenci prvního vztahu (20 míčů stálo 868 Kč). Pokračuje vyřešením vazby α, dále β, kterou nepočítala písemným součinem pod sebe. Došlo k chybě, kterou jsme v průběhu našich experimentů spatřovali opakovaně u více žáků.



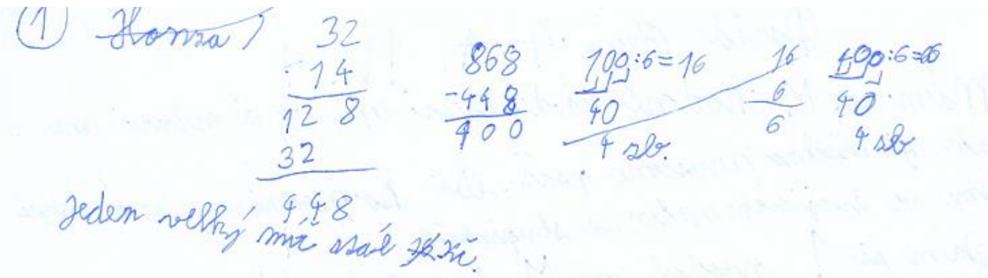
Obr. 4.6



Obr. 4.7

Řešení Renaty *(Obr. 4.7)* Renata si nejprve přesně opsala zadání. Pravděpodobně během této činnosti došlo k uchopení jednotlivých vazeb, následující postup působí zcela vyváženým dojmem a jistě. Řešitelka přesně věděla, jaké výpočty musí provést, aby se dostala k výsledku. Chyba nastala ve vazbě γ a přenesla se do finálního kroku řešení, do výpočtu vazby δ. Pozornost zde byla zaměřena na kontrolu dělení, zbytek žákyně neinterpretovala do odpovědi.

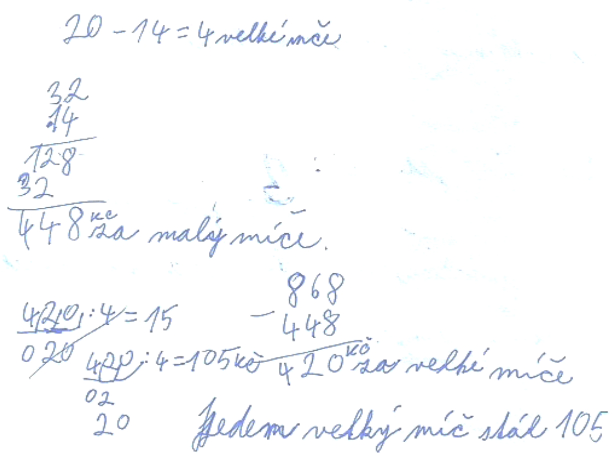
Řešení Filipa *(Obr. 4.8)* Filip se nejprve rozhodl pro opsání zadání, ovšem dle našeho názoru si tuto činnost záhy rozmyslel z důvodu úspory energie a času, proto škrtl slovo „Honza“ a pustil se raději rovnou do samotného řešení. Tento žák byl schopen situaci uchopit, ale toto uchopení se mu nepodařilo udržet po celou dobu trvání řešitelského procesu. V okamžiku, kdy začal počítat, numerika vytěsnila vědomí dalšího postupu. Úroveň strategie tedy přešla do úrovně kalkulu, kde došlo k chybě. Otázkou je, proč žák škrtal. Mohlo to být způsobeno reakcí na vycházející zbytek a uvědomění si chyby. Jiným vysvětlením by mohla být nečitelnost číslic v rozdílu (záměna 400 za 100), což si zjevně Filip uvědomil a dělení zkusil znovu. Opětovně mu vyšel zbytek. Slovní odpověď zformuloval správně, ovšem nedoplnil žádný číselný údaj.



Obr. 4.8

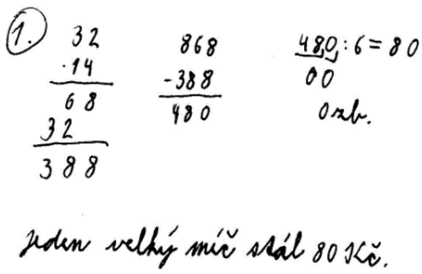
II.c Jeden výpočet chybný a výsledek beze zbytku

Do této podkategorie zahrnujeme 2 řešení z 12 (17 %).



Obr. 4.9

Řešení Denisy *(Obr. 4.9)* Zde došlo k „hloupé“ chybě a to ve výpočtu P_3, konkrétně 20 – 14 = 4. U žáka čtvrtého ročníku je takováto chyba zarážející. V tomto řešení se objevily dílčí komentáře k získaným výsledkům, které měly dle našeho názoru pomoci řešitelce udržet kontext mezi vypočítanými hodnotami. Zvláštností je dopisování veličin do komentářů (zkratky Kč) za vypočítané hodnoty. V tomto okamžiku byla žákyně pozorná a pečlivá, otázkou je, proč nedoplnila stejnou veličinu do odpovědi. Můžeme usuzovat buď na únavu, nebo byla příčinou nepozornost.

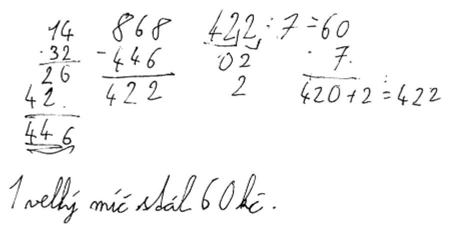


Obr. 4.10

Řešení Tiny *(Obr. 4.10)* Tina řešila úlohu úsporně, bohužel chyba vznikla již během prvního výpočtu. Roznásobila správně 2 a 4, pak se stala chyba a pravděpodobně roznásobila číslice v řádku (3 a 2) namísto 4 a 3. Řešení bylo zapsané s jistotou, bez škrtání, výsledek dělení signalizoval navíc věrohodnost podílu, jelikož nevyšel žádný zbytek.

II.d Dva výpočty chybné a výsledek se zbytkem, který není zohledněn v odpovědi

V této podkategorii máme pouze 1 řešení z 12 (8 %).



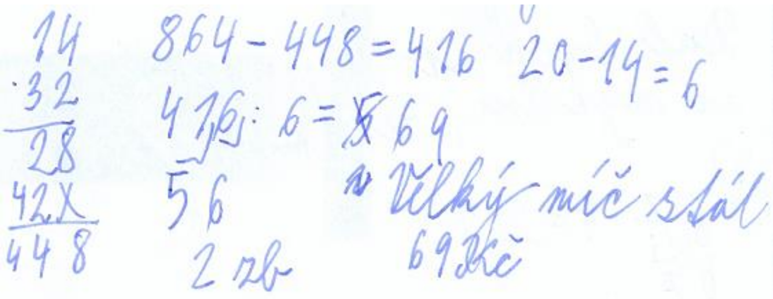
Obr. 4.11

Řešení Petra *(Obr. 4.11)* Petr byl jediným žákem, který v průběhu svého řešení numericky chyboval dvakrát. První chyba se objevila v písemném řešení vazby β, druhá vznikla při mentálním řešení vazby α. Opětovně nás tato chyba udivila vzhledem k nízké numerické náročnosti vazby.

II.e Chyba v přepisu čísla

Do této kategorie spadají 3 žákovská řešení z 12 (25 %), navíc řešitelům vyšel vždy i zbytek. Částečně se tedy tato řešení překrývají s podkategorií II.a, II.b.

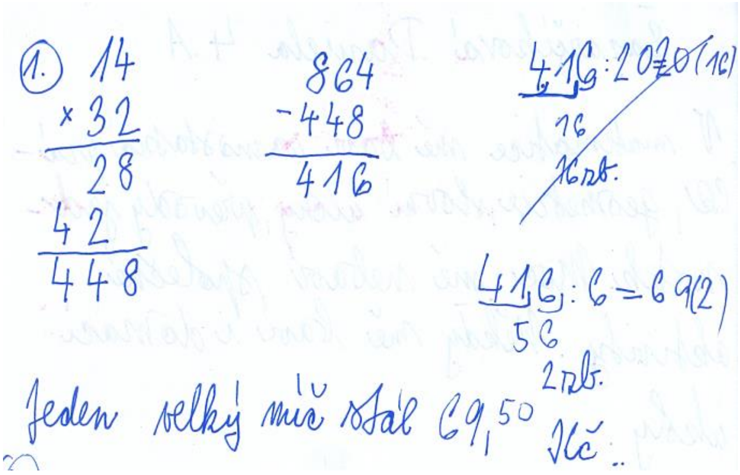
Přesné opsání zadání se vyskytlo jedenkrát. V jednom případě došlo k evidenci vybraných údajů ze zadání, ovšem chybným způsobem: 20 míčů = 868, 14 míčů (malých) = 32. Naše interpretace takového zápisu by byla: 14 malých míčů stálo 32 korun. V řešení tato interpretace neproběhla, autorka svému zápisu rozuměla, ovšem došlo k přepisu čísla 32 na 36. Dvě řešení obsahovala čtyři výpočty, jedno řešení výpočty tři. Zajímavé byly opět interpretace zbytku. Aleš *(obr. 4.12)* zbytek považoval za část výpočtu a do výsledku jej nijak nezakomponoval, v případě Dity *(obr. 4.13)* proběhla opačná snaha, ve které vyšla ze svých zkušeností z běžného života, kde jsou ceny výrobků uváděny i s použitím haléřů.



Obr. 4.12

Řešení Aleše *(Obr. 4.12)*

Přepis není matematickou chybou. Je to chyba z nepozornosti nebo aktuální nedostatečné energetické výbavy. Závažnější je ovšem skutečnost, že úloha žákovi vyšla se zbytkem a řešitel tuto anomálii nereflektoval. Nejpřirozenější by byla kontrola, zda chyba nevznikla během dělení, ovšem podle nás je vysoce pravděpodobné, že to, co by žák nekontroloval, je skutečnost, zda chyba nevznikla při přepisování číselných údajů ze zadání. Pokud má možnost učitel s žákem mluvit o jeho řešení, je vhodné se ptát, jak si vykládá vycházející zbytek 2. Když začne úlohu řešit znovu a vychází vše stejně, učitel tohoto žáka odkáže na spolužáka, který by mu mohl poradit a hlavně ukázat na místo, kde chyba vznikla. Učitel také může po odhalení problému položit žákovi otázku, jak by se mohl v budoucnu téže chyby vyvarovat. Žákova odpověď by pravděpodobně odkazovala na pečlivější opisování čísel ze zadání, k čemuž může učitel dodat následující: „Pokud bys ve svém případě u zbytku napsal komentář, že to vychází zvláštně a že by zbytek být neměl, tak je mi jasné, že seš si vědom přítomnosti chyby, i když ji neumíš lokalizovat.“ Tento žák nepřikládá význam sémantice, je tedy nutné ji povzbuzovat a utvářet propojování matematiky a reality. Učitel má určité nástroje, kterými toto umí realizovat, např. zadávat textově zajímavé a popletené úlohy z různých prostředí, využívat metodu dramatizace, zakreslování úlohy apod. Aby toto nebylo pro žáka samoúčelné, můžeme ho požádat, aby takovýto materiál ukázal spolužákovi nebo mladšímu sourozenci a vysvětlil mu danou problematiku.



Obr. 4.13

Řešení Dity *(Obr. 4.13)* V tomto řešení došlo v průběhu řešení ke strategické chybě. Dita měla číslo 6 v hlavě, ovšem tuto skutečnost neudržela, začala dělit celkovým počtem 20. Tato žákyně též pracovala na dvou úrovních, ovšem nebylo to již tak spolehlivé jako u předcházejícího řešitele Aleše. Pro tuto žákyni by byla dobrým diskusním partnerem např. Aneta (obr. 5.2), která je vizuální typ a proto by mohla této žákyni dobře ukázat a vysvětlit řešitelský postup. Otázkou je, proč dívka v průběhu řešení škrtala. Zda to bylo kvůli vycházejícímu zbytku, na to bohužel můžeme pouze usuzovat. V dalším pokusu dělení rovněž vyšel zbytek, ale příhodnější, jelikož zbytek 2 sémanticky transformovala na 50 haléřů. V tomto řešení je pro nás byla zajímavá právě dívčina interpretace zbytku, který byl principiálně provázán na desetinné číslo. Dívka do této provázanosti sémanticky viděla a vnímala, že zbytek musí nějakým způsobem rozdělit a přidat ke svému výsledku. Toto řešení bychom hodnotili na základě výše popsaných argumentů jako kvalitnější oproti Alešovi *(obr. 4.12).*

III. Neúplná nebo chybná řešitelská strategie

Ze všech získaných řešení v tomto experimentu jsme do této kategorie zahrnuli 20 řešení z 55 (36 %). Po analýzách jsme si byli vědomi rozmanitosti řešení a pocítili potřebu vytvoření podkategorií jako u kategorie II. Nedařilo se nám bohužel najít vhodné parametry, které by bylo možné aplikovat na všechna získaná řešení. Z tohoto důvodu jsme se zaměřili alespoň na rozdíly v úspěšnosti u jednotlivých vazeb.

Řešení, ve kterých žák v závěru vše škrtl, jsme přiřadili do této kategorie, jelikož jsme chtěli oddělit ty žáky, kteří vyvinuli snahu úlohu řešit, a ty žáky, kteří se o řešení ani nepokusili a rezignovali nejspíš ihned po přečtení zadání.

<u>Evidence zadání:</u>

Dva žáci zahájili svou práci přesným opsáním zadání, pět se jich rozhodlo pro evidenci vybraných údajů a zbývajících třináct žáků žádnou evidenci neprovedlo.

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb:

<table>
<tr><th colspan="2">Provedení
celkem 20 žáků</th><th colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</th><th colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</th><th colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</th><th colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</th></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">3</td><td>3</td><td rowspan="2">10</td><td>1</td><td rowspan="2">4</td><td>1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0</td><td>9</td><td>3</td><td>0</td></tr>
</table>

Tab. 4.9

<table>
<tr><th colspan="2">Provedení (v %)
celkem 20 žáků</th><th colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</th><th colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</th><th colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</th><th colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</th></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">15 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">15 %</td><td>15 %</td><td rowspan="2">50 %</td><td>5 %</td><td rowspan="2">20 %</td><td>5 %</td><td rowspan="2">0 %</td><td>0 %</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0 %</td><td>45 %</td><td>15 %</td><td>0 %</td></tr>
</table>

Tab. 4.10

Vidíme výrazně nižší hodnoty v porovnání s kategoriemi I. a II. Vysoké procento žáků neodhalilo jednotlivé vazby, proto je tito žáci ani nemohli evidovat. Překvapila nás velmi nízká evidence vazby α, což lze vysvětlit tím, že není viditelná přímo v zadání. Proti tomu se nám potvrdilo očekávání nejvyšší četnosti u vazby β, což je ovlivněno idiomem, se kterým se žáci často setkávají.

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb:

Správnost celkem 20 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	6	10	4	0
numerická	5	7	4	0

Tab. 4.11

Správnost (v %) celkem 20 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	30 %	50 %	20 %	0 %
numerická	25 %	35 %	20 %	0 %

Tab. 4.12

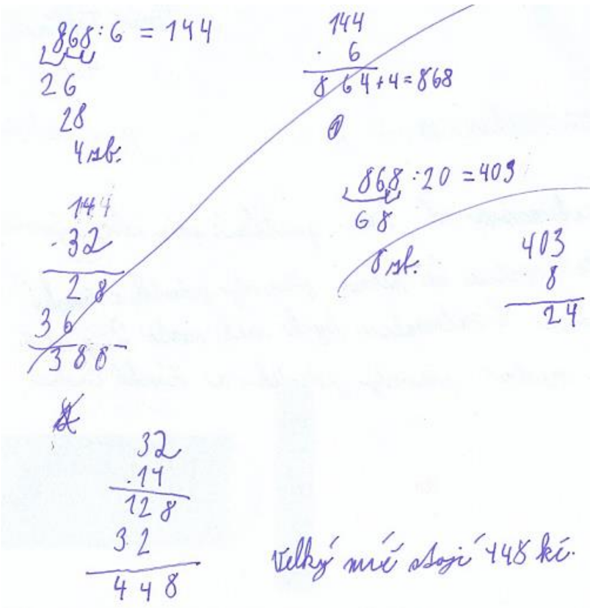
V návaznosti na předchozí zjištění nás nepřekvapila 50 % úspěšnost vazby β ve strategii. Tato vazba patřila také k nejúspěšnějším rovněž s ohledem na numeriku. Očekávali jsme, že vazba δ, která vyžaduje výstupy z vazeb α i γ, bude nejproblematičtější, což se potvrdilo.

Vizualizace, ilustrace:

Neobjevily se.

Slovní odpověď:

V této kategorii 9 žáků správně formulovalo odpověď, v 1 případě byla formulace chybná (autorka použila v odpovědi „za velké míče…“). 10 řešitelů odpověď neuvedlo. Myslíme si, že tento jev byl dán vědomím žáků o nedokončenosti úlohy, což korespondovalo i s množstvím vazeb evidovaných v řešení.

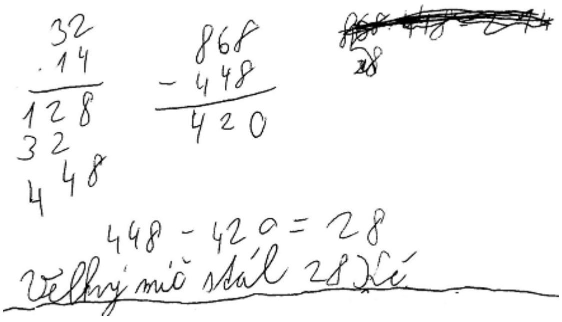


Obr. 4.14

Řešení Tadeáše *(Obr. 4.14)* Snažil se porozumět, škrtal. Nejprve zkoušel dělit 868 : 20, dále pokračoval úlohou 14 × 32. Jednalo se o epizodické uchopování fragmentů úlohy. Fragment 14 × 32 je sémanticky jasný, fragment 868 : 20 sémanticky pochopitelný (přečetl první větu a otázku, kde vypustil slovo „velký“). První pokus byl sémanticky nečitelný (868 : 6), pravděpodobně se podíval na začátek zadání a četl čísla 868, 20, 14 a správně usoudil, že pokud je všech míčů 20 a malých 14, tak velkých bude 6. Problémem Tadeáše byla neschopnost chytit text úlohy vcelku. První fragment byl spíše strukturální, sémanticky neukotvený, proto dělal kalkulativní kontrolu. Učitel by měl vedle takového žáka sedět a pomoci mu (kognitivně i sociálně). Didaktickým cílem by v tomto případě bylo zvýšit žákovo sebevědomí k autonomní myšlenkové operaci, nejlépe přes okamžik, kdy žák zažije úspěch. Toto je dobrá ukázka toho, že pokud je v žácích trénována rychlost a dril, žák nutně upadá do formalismu. Je sice numericky zdatný (to je vidět i v tomto případě – pustil se do písemného dělení dvouciferným dělitelem, které v tu dobu ještě nebylo probíráno), ovšem řešitelský proces byl štěpen a napaden nejistotou. Nakonec se Tadeáš ustanovil na fragmentu 14 malých míčů po 32 Kč, proto by se měl součin 448 vztahovat k malým míčům. Ovšem otázka se ptala na velké míče, proto žák odpověď slepil ze dvou fragmentů. Škrtání v tomto řešení znamenalo nejistotu a zároveň nám ukázalo, že žák neměl strach z viditelnosti chyby. Možností, jak by mohl učitel žákovi pomoci, by bylo položení otázky, co lze vypočítat ze zadaných údajů, např. Jsi schopen zjistit, kolik bylo velkých míčů? Umíš zjistit cenu za malé míče? apod. V tomto řešení můžeme vidět snahu a zároveň neschopnost uchopit složitější text vcelku.

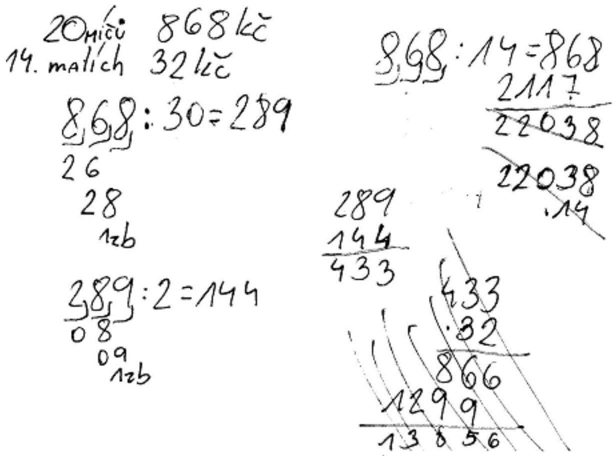
Řešení Oliny *(Obr. 4.15)*

Olina začala správným uchopením a vypočítáním vazeb β a γ. Domníváme se, že následný krok bylo dělení 868 : 448, které je zaškrtané. Příčinou mohlo být buď uvědomění si chyby tohoto kroku, nebo neschopnost jej vyřešit. Olina poté vzala dvě výchozí hodnoty, které zjistila v předchozích výpočtech a navzájem je odečetla. Tento tříkrokový postup je pro žáky dobře známý, jelikož se s úlohami tohoto typu často setkávají v učebnicích a pracovních sešitech. Jako signál přítomné chyby mohla působit částka 28 Kč za velký míč, což je méně než 32 Kč za malý míč a tudíž odpověď neodpovídá realitě.



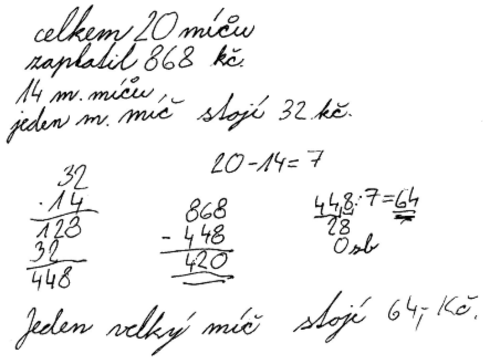
Obr. 4.15

Řešení Patricie *(Obr. 4.16)* V tomto případě je zřejmé neuchopení kontextu úlohy. Patricie se snažila „něco" vypočítat, ovšem pracovala s čísly, které k sobě kontextuálně nepatřily. Zjevně nefungovala evidence údajů ze zadání, jednalo se spíše o mechanické provedení, než pomůcku pro úspěšné vyřešení. Zajímavé je rozepsání dělení 868 : 32. Tato úloha jí nejspíše připadala nezvládnutelná, proto si číslo 32 rozložila na desítky a jednotky a dělení prováděla postupně. Obě získané hodnoty následně sečetla. Další fází byla nejspíš kontrola (zpětným násobením), při níž vyšel zcela jiný výsledek. Následoval další pokus o dělení, tentokrát 868 : 14. Je zřejmé, že dívka neznala algoritmus písemné dělení dvojciferným dělitelem (v tu dobu neprobráno). Opětovně se snažila o rozklad. Snaha této dívky početně získat nějaká čísla ji dovedla do bludného kruhu. Učitel by měl u těchto žáků kontrolovat uchopení úlohy a diskutovat s nimi o postupu řešení.



Obr. 4.16

Řešení Zorky *(Obr. 4.17)* Toto řešení se jevilo nadějně, ovšem došlo v něm ke dvěma chybám. První chybou bylo špatné numerické vyřešení vazby α, které jsme evidovali již v předcházejících analýzách. Chybné uchopení vazby δ znamenalo další špatný řešitelský krok. Zorka vzala chybně hodnotu všech malých míčů (448) namísto hodnoty za velké míče, kterou si spočítala v předchozí vazbě (420). Došlo tedy ke ztrátě kontextu. Podíl navíc vyšel beze zbytku, což by odpovídalo správnému vyřešení úlohy (žáci jsou na tyto případy zvyklí). Zorce by k udržení kontextu pomohly dílčí komentáře u jednotlivých výpočtů, jako jsme je viděli např. u řešení Denisy v II.c *(obr. 4.9).*



Obr. 4.17

IV. Absence řešitelského procesu

V jediném případě (2 %) jsme se setkali s absencí řešitelského procesu. Tento žák nevyvinul jakoukoli snahu o řešení úlohy, pravděpodobně došlo k rezignaci ihned po přečtení zadání úlohy, nebo žák úlohu odmítl řešit ještě před jejím přečtením.

4.1.4 Vzájemná komparace tříd jako dvou celků

Položili jsme si otázku, zda se projeví nějaké konkrétní odlišnosti mezi dvěma paralelními třídami vyučovanými stejným učitelem (mnou) a v matematice vedenými stejným přístupem (konstruktivisticky). Vlivem zkušeností z výuky jsem osobně očekávala vyšší úspěšnost u třídy 4. A, kde jsem působila zároveň jako třídní učitelka a tím pádem pracovala s žáky i v jiných předmětech. V této komparaci jsme se zaměřili na celkovou úspěšnost žáků v jednotlivých vazbách úlohy po stránce strategické a numerické. Údaje jsme shrnuli do následujících tabulek, které nám pomohly vytvořit si celkovou představu o úspěšnosti tříd v jednotlivých sledovaných oblastech.

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb:

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení (4. A)
celkem 28 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">9</td><td>7</td><td rowspan="2">25</td><td>2</td><td rowspan="2">20</td><td>7</td><td rowspan="2">21</td><td>2</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>1 + 1</td><td>23</td><td>13</td><td>19</td></tr>
</table>

Tab. 4.13

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení (4. B)
celkem 27 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">9</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">9</td><td>9</td><td rowspan="2">19</td><td>0</td><td rowspan="2">15</td><td>2</td><td rowspan="2">14</td><td>3</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0</td><td>19</td><td>13</td><td>11</td></tr>
</table>

Tab. 4.14

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení (4. A, v %)
celkem 28 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">50 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">7 %</td><td colspan="2">0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">32 %</td><td>25 %</td><td rowspan="2">89 %</td><td>7 %</td><td rowspan="2">71 %</td><td>25 %</td><td rowspan="2">75 %</td><td>7 %</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>7 %</td><td>82 %</td><td>46 %</td><td>68 %</td></tr>
</table>

Tab. 4.15

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení (4. B, v %)
celkem 27 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">33 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">4 %</td><td colspan="2">0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">33 %</td><td>33 %</td><td rowspan="2">70 %</td><td>0 %</td><td rowspan="2">56 %</td><td>8 %</td><td rowspan="2">52 %</td><td>11 %</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0 %</td><td>70 %</td><td>48 %</td><td>41 %</td></tr>
</table>

Tab. 4.16

Z údajů shrnutých v tabulkách vyplynula vyšší procentuální úspěšnost u všech vazeb ve třídě 4. A. Pokud bychom porovnali jednotlivé vazby úlohy, nejhorší výsledek v této třídě náležel vazbě δ, kterou nerozpoznalo 25 % žáků (7). Proti tomu ve 4. B byla tato vazba nerozpoznána u 48 % žáků (13). V obou třídách získala naopak nejvyšší úspěšnost v rozpoznání vazba β. Ve třídě 4. A ji nerozpoznalo 11 % žáků (3), ve 4. B 30 % žáků (8). Tuto vazbu žáci lépe odhalovali díky její formulaci v textovém zadání v podobě idiomu a navíc jejím častým výskytem. Dále jsme viděli, že v obou třídách převažoval písemný způsob provedení, žáci si více evidovali dílčí kroky svých řešení. Jedinou výjimku představovala vazba α, se kterou žáci 4. A pracovali více mentálně než písemně. Ve 4. B se hodnoty u této vazby rovnaly pro mentální i písemnou evidenci. Způsob písemné práce s jednotlivými vazbami byl převážně dle algoritmů písemných početních operací (počítání pod sebe, u písemného dělení tím rozumíme sepisování zbytků). To bylo očekávatelné zejména u početně nejobtížnější vazby β.

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb:

Následující přehledy ukázaly rozdílnou úspěšnost jednak mezi jednotlivými vazbami, jednak mezi strategií a numerikou.

Správnost (4. A) celkem 28 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	22	25	22	21
numerická	22	21	18	21

Tab. 4.17

Správnost (4. B) celkem 27 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	18	19	16	13
numerická	15	16	16	14

Tab. 4.18

Správnost (4. A, v %) celkem 28 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	79 %	89 %	79 %	75 %
numerická	79 %	75 %	64 %	75 %

Tab. 4.19

Správnost (4. B, v %) celkem 27 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	67 %	70 %	59 %	48 %
numerická	56 %	59 %	59 %	52 %

Tab. 4.20

V těchto hodnotách došlo k výraznějšímu rozptylu. Zatímco ve 4. A byla nejnižší úspěšnost ve strategii 75 %, ve 4. B pouze 48 % (v obou případech shodně u vazby δ). V numerice zaznamenala nejhorší výsledek ve třídě 4. A vazba γ (64 %), ve 4. B vazba δ (52 %). Při pohledu na úspěšnost strategickou v jednotlivých vazbách ve 4. A byl rozptyl 14 %, v numerice 15 %. Ve 4. B byl rozptyl ve strategické úspěšnosti 22 %, v numerice 7 %. Tyto hodnoty ukázaly, že ve třídě 4. A byli žáci vyrovnaní na úrovni strategické i numerické, ve 4. B byli žáci vyrovnanější v oblasti numeriky. Průměrná úspěšnost ve 4. A souhrnně ve strategii je 80,5 %, v numerice 73, 25 %. Průměrná úspěšnost ve 4. B souhrnně ve strategii je 61 %, v numerice 56,5 %.

4.1.5 Komparace žáků vedených konstruktivisticky po celou dobu školní docházky s žáky vedenými konstruktivisticky pouze v aktuálním školním roce

V rámci tohoto experimentu jsme chtěli využít situace, kdy byli ve třídách zastoupeni žáci vedení konstruktivisticky a žáci vedení transmisivně. Položili jsme si otázku, jak úspěšnými řešiteli jsou žáci, které jsem učila matematiku od první třídy konstruktivisticky. Sledovali jsme pouze úspěšné řešitele ve třídě - tedy ty, kteří patřili do kategorie I a II (viz. 4.1.3).

V obou třídách se ukázala vyšší úspěšnost původních, konstruktivisticky vedených žáků, a to jak po stránce strategické, tak po stránce numerické. Přestože rozřazování žáků do čtvrtého ročníku neprobíhalo na základě výkonnosti a dosavadního hodnocení, jeví se třída 4. A jako úspěšnější. Při porovnání úspěšnosti strategické nebyly mezi původními a novými žáky v této třídě rozdíly, viditelný propad nastal ovšem v numerice u nových žáků (tedy těch, jež byli vedeni tradičním způsobem). Toto zjištění bylo překvapivé, jelikož v tradičním vyučování je kladen důraz zejména na trénink spojů (pravidelné počítání „sloupečků“) a tudíž jsme očekávali naopak výraznější úspěšnost právě v numerice. Ve 4. B byli původní žáci ve strategii i numerice totožně úspěšní, větší propad byl u nových žáků jak ve strategii, tak opět i v numerice. Naše zjištění shrnuje následující tabulka 4.21.

4. A		**správnost**	
původní žáci	10 (36 %)	strategická	8 (80 %)
		numerická	7 (70 %)
noví žáci	18 (64 %)	strategická	13 (72 %)
		numerická	7 (39 %)
4. B		**správnost**	
původní žáci	7 (26 %)	strategická	4 (57 %)
		numerická	4 (57 %)
noví žáci	20 (74 %)	strategická	8 (40 %)
		numerická	7 (35 %)

Tab. 4.21

4.1.6 Závěr a reflexe E1

Experiment jsem započala tvorbou a aplikací nástroje výzkumu. Tím byla baterie úloh. Předpokládala jsem, že budu analyzovat všechny úlohy a nakonec udělám komparaci jak na úrovni úloh, tak na úrovni žáků. Již po prvních analýzách realizovaných na konzultacích s vedoucím mi bylo jasné, že moje původní představy byly nereálné, že analýzy vyžadují podstatně více času a úsilí, než jsem předpokládala a že jejich rozsah bude značný. Byla jsem překvapena velkou časovou náročností jednotlivých analýz, proto jsem se rozhodla pro analýzy řešení pouze jedné úlohy. Volba padla na úlohu číslo 1 a to z důvodu rozmanitosti řešitelských postupů.

S analýzou žákovských řešení jsem již jisté zkušenosti měla, ale teď bylo nutné jít výrazně hlouběji. Učila jsem se podrobně analyzovat každé řešení, odhalovat myšlenkový proces, který řešitele vedl k tomu, aby napsal to, co napsal a všímat si detailů jako například způsobu škrtání. Navzdory mému úsilí najít vše, co se v řešení žáka najít dá, mi nejednou na konzultacích vedoucí ukázal jevy, které unikly mé pozornosti. Na jedné straně mne tato opomenutí mrzela, ale na druhé straně jsem cítila, jak mi pomáhají hlouběji pronikat do „řemesla“ analýz.

Jak soubor zanalyzovaných řešení nabýval na rozsahu, ukazovala se potřeba jeho organizace. Najít vhodnou organizaci znamenalo najít vhodné klasifikační fenomény, organizační principy celého souboru analýz. Základní rozdělení žákovských řešení na správná a chybná zdaleka nestačilo. Pokoušela jsem se klasifikovat řešení podle chyb, kterých se žák dopustil. Jenže z toho důvodu, že jeden žák udělal chybu A, B, C, jiný chyby B, C, D a další chyby A, D, E se brzy ukázalo, že toto je cesta neschůdná. Chvíli jsem si myslela, že bude možné v každém chybném řešení najít chybu dominantní. I to se ukázalo jako nevhodné. Ani klasifikace řešení pomocí způsobu uchopení úlohy se nezdařila. Moje víra v to, že nakonec nějakou klasifikaci najdu, s každým neúspěšným pokusem klesala a s tím i naděje, že výzkum někam povede. Poté ale, nevím, zda to bylo z impulzu od vedoucího, nebo z mé vlastní hlavy, jsem pochopila, že nutný předpoklad pro další práci je důvěrná znalost struktury úlohy.

Moje pozornost se tedy obrátila k úloze. Z analýz jsem již znala jednotlivé řešitelské tahy dílčích úloh, na které bylo možné hlavní úlohu rozložit. Poučila jsem se v literatuře, že je nutné vycházet nikoliv z úlohy, nýbrž hlouběji, z úlohové situace. Tu je potřeba poznat jak procesuálně, tak konceptuálně. Po několika nezdarech jsem nakonec dospěla ke kýženému výsledku, což mi vlilo velikou naději do mé mysli. Jak se ukázalo, byla to naděje opodstatněná, protože jsem vytvořila účinný nástroj pro organizaci souboru žákovských řešení. Jádrem nástroje byla čtveřice vztahů, do nichž se řešitelský proces rozkládal. Vztahy jsem označila řeckými písmeny α, β, γ, δ (vzájemné propojení těchto vztahů je popsáno v části 3.5.1).

Vedlejším produktem analýzy úlohové situace byly mnohé modifikace úlohy 1. Znalost modifikovaných úloh „základní" úlohy umožňuje učiteli úspěšně diferencovat výuku, předkládat každému žáku úlohy přiměřené jeho schopnostem. Z toho důvodu je analýza úlohové situace závažná i z hlediska pedagogických aplikací.

Pomocí nově vytvořeného nástroje se mi již pak poměrně rychle povedlo najít způsob, jak přehledně zachytit všechna analyzovaná řešení tak, aby u každého žáka byly uvedeny všechny důležité jevy. Celý přehled je uveden v Příloze 1 a 2. Přehled se ukázal jako fungující pomůcka umožňující rychle vyhledávat konkrétní data. Bylo to třeba například při tvorbě tabulek v kapitole 5.1.3, nebo při výběru ilustrací do této kapitoly.

Z evidence všech řešení jsem měla velikou radost, ale stále jsem pociťovala potřebu dalšího organizačního nástroje, který by mi umožnil utřídit všechna řešení pomocí jediného klíče. Při porovnávání dvou nebo tří žákovských řešení problémy nebyly. Ale organizace všech řešení zde scházela. Správná řešení byla jasná. Otázkou zůstávalo, jak organizovat řešení s nedostatky, nebo řešení chybná. Tři základní kritéria, která jsem se pokoušela kombinovat, byla: 1) pořadí, ve kterém řešitel odhaluje vztahy α, β, γ, δ a 2) místo, ve kterém se dopouští chyby, nebo zcela troskotá a 3) příčina chyby.

Nakonec mne napadlo vyjít od klasifikace 4 základních kategorií uvedených na začátku kapitoly 5.1.3 a pak sledovat v řešení, jak zvládá vazby α, β, γ, δ v tom pořadí, jak je řešitel uvádí. Po několika pokusech se mi povedlo vytvořit schéma (Schéma 4.1) o kterém se domnívám, že je aplikovatelné nejen na ta řešení, které jsem zkoumala, ale na všechna případná další žákovská řešení. Z tohoto schématu, ke kterému jsem se dopracovala až na konci čtyřleté práce, jsem měla velikou radost. Tu umocnil i vedoucí práce, když ji hodnotil jako výborný nástroj, který byl vytvořen zcela bez jeho inspirace nebo zásahu. Vzhledem k době vzniku schématu jsem jej připojila do tohoto závěru a reflexe, není tedy v práci dříve uvedeno.

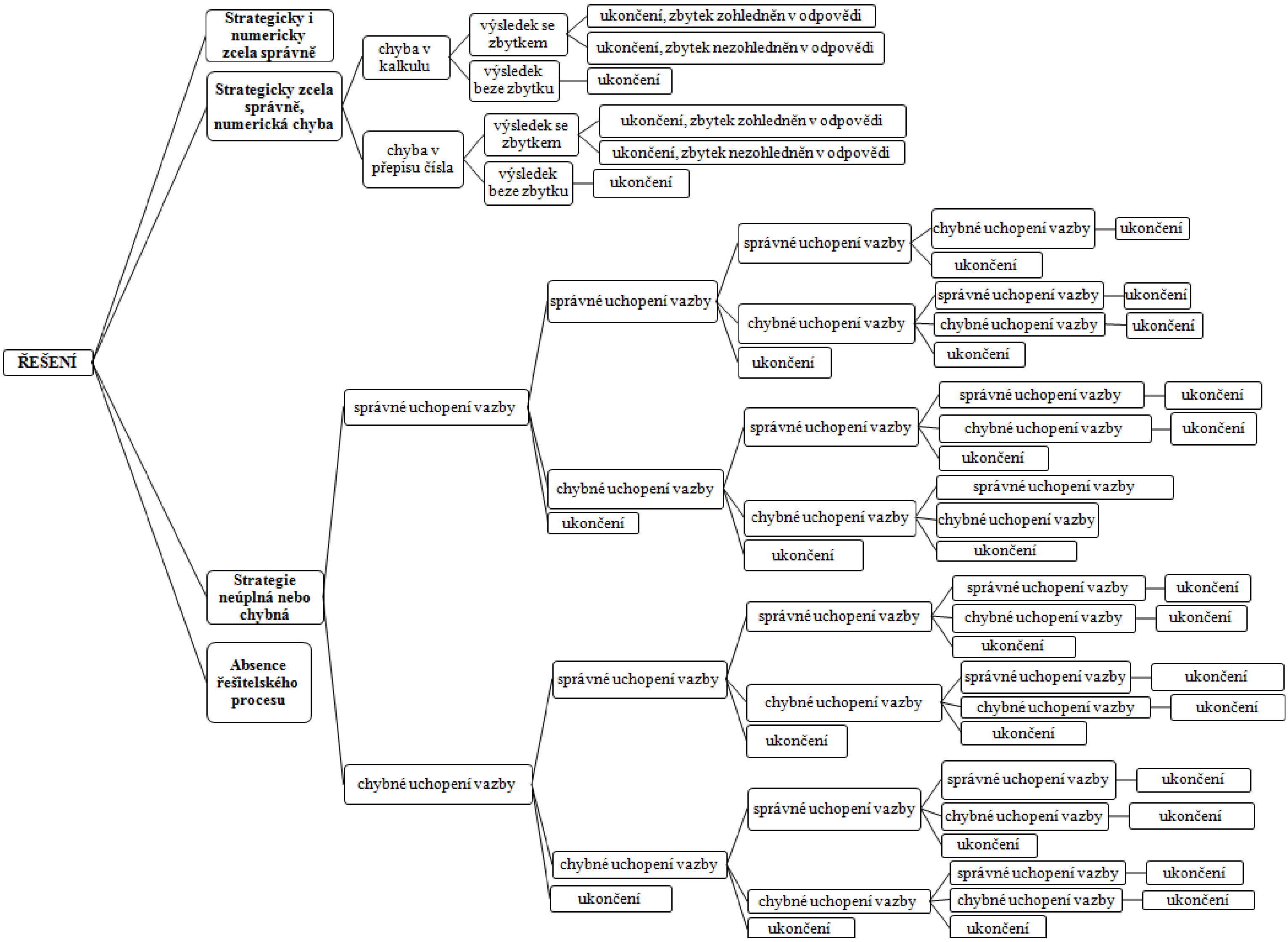


Schéma 4.1

V průběhu srovnávání dvou tříd, ve kterých jsem figurovala v roli učitelky matematiky, jsem si více uvědomovala významnou rozdílnost ve výkonech žáků. Třída A byla lepší, než třída B. Otázkou byla příčina této odlišnosti, protože v obou třídách jsem pracovala obdobně. Domnívám se, že příčina rozdílů spočívala ve způsobu výuky v jiných předmětech. V třídě A, kde jsem učila všechny předměty, jsem se snažila uplatňovat konstruktivistické přístupy i v přírodovědě či vlastivědě. Překvapilo mne, do jaké míry skutečnost, že jsou žáci vedeni konstruktivisticky nejen v matematice, ovlivňuje jejich matematické napředování.

Když se zamýšlím nad tím, co mi tento experiment dal, vidím zde tři roviny. První je odborná a týká se znalostí a schopností analyzovat písemný (ale i ústní) projev žáka. Druhá je aplikační a dává mi nástroje, pomocí kterých jsem schopna účinněji pomáhat žákům v jejich rozvoji. Třetí rovina je osobnostní. Týká se mého pedagogického přesvědčení, vztahu k žákům i matematice, a v neposlední řadě posiluje moje učitelské sebevědomí.

4.2 Experiment E2: Úloha 1 v tradičně vedených třídách

4.2.1 Příprava a realizace E2

Cíl

Na základě výsledků E1 jsme si položili otázku, jak by se odlišovala řešitelská úspěšnost úlohy 1 u žáků vedených tradičním způsobem. Předpokládali jsme stále nižší úspěšnost ve strategii a naopak vyšší úspěšnost v numerice (přestože se nepotvrdilo v E1). Zároveň jsme se domnívali, že rozmanitost řešení bude nižší než v E1. Cílem bylo získat dostatečné množství tradičních žákovských řešení a porovnat je s konstruktivisticky vedenými třídami. Cíle tohoto experimentu byly následující:

- Komparace všech získaných dat a vyčlenění nových fenoménů
- Vzájemná komparace tříd jako dvou celků
- Komparace tříd vedených tradičně a konstruktivisticky

Cílová skupina

Úlohu 1 jsme zadali ve dvou 4. třídách (celkem 42 žáků), které byly vedeny po celou dobu tradičním způsobem. Obě aktuální paní učitelky byly aprobovány v oblasti matematiky pro 2. stupeň ZŠ a střední školy a matematiku v těchto třídách vyučovaly prvním rokem.

Forma práce, způsob zadání

Žáci pracovali individuálně na samostatný papír, kde bylo napsané pouze zadání úlohy a žádné doplňující informace. Žáci byli informováni, že se nejedná o test.

Způsob sběru dat

Data byla tvořena sebranými žákovskými řešeními. Hodina nebyla dokumentována prostřednictvím videonahrávky. Nebyl přítomen externí pozorovatel.

4.2.2 Analýza dat

Na základě analýz žákovských řešení jsme vyčlenili několik fenoménů, které se objevovaly ve většinovém množství řešení a přiměly nás k hlubšímu zamyšlení nad jejich příčinami. Jednalo se o zápis, který tvořil pevnou součást řešení u většiny žáků, a dále o používání algebraického vyjádření neznámé.

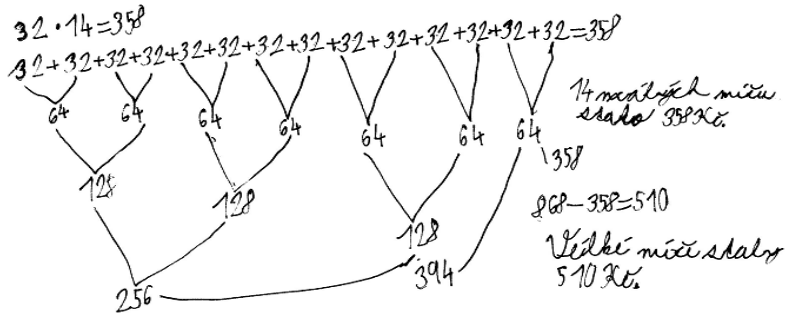
Zápis slovní úlohy

Při nahlédnutí do tradičních učebnic matematiky a pracovních sešitů si můžeme všimnout důležitosti zápisů slovních úloh, které jsou prezentovány jako nedílná součást řešení. Žáci jsou tedy k tomuto postupu řešení ze strany učitelů velmi často vedeni. V různých materiálech a přípravách učitelů jsme se pravidelně setkali s instruováním žáků, jak v procesu řešení slovní úlohy postupovat, přičemž tento postup přímo obsahoval dílčí návodné kroky jako „přečti si zadání, udělej zápis úlohy, neznámý údaj si označ písmenem“ apod. Tuto cestu neshledáváme jako šťastnou a dále vysvětlíme proč.

Funkce zápisu

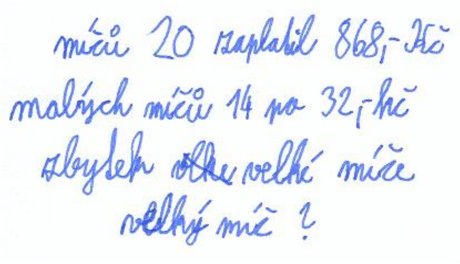
Pokládáme si otázku, zda je žákům prvního stupně zápis slovní úlohy užitečný, potažmo čím. Měl by obecně sloužit k lepšímu zorientování se v úloze, k evidenci údajů a vytyčení si cíle, jehož má být výpočty dosaženo. Slovní zápis napomáhá žákovi úlohu uchopit. Proti tomuto přesvědčení nic nenamítáme. Toto uchopení se ovšem musí činit analyticky, tedy nejprve rozložit text úlohy na jednotlivé fragmenty, a následně každý z těchto fragmentů vést k určitému výpočtu. Tyto dílčí výsledky je nakonec nutné vzájemně propojit.

Prospívá ovšem takovýto zápis i takovému žáku, který uchopí úlohu konceptuálně a nedokáže zadání analyticky fragmentovat? Potřebuje žák, který vyřeší úlohu vhledem, provádět zápis? Zde se můžeme odkázat na ilustrativní příběh žáka druhé třídy (in Hejný, 2014, str. 115 – 119), který věděl správný výsledek okamžitě po přečtení zadání, nicméně paní učitelka nebyla spokojená a kárala jej. Požadovala po chlapci zápis a výpočty s odkazem na to, že tak se přece musí slovní úloha řešit. Zápis musí být řádně provedený a autentický s tím, co paní učitelka dětem ukazuje na tabuli. Žáci jsou tedy nuceni k imitaci, jakákoli snaha o produktivní myšlení a tvořivé přístupy je ihned zastavena. Žák z příběhu uchopil úlohu konceptuálně, neuměl ji analyticky rozložit. Právě tito žáci nebývají školsky úspěšní z pohledu tradičního vyučování. Úlohy si řeší způsobem sobě vlastním, rovněž konkrétní idiomy. Projevuje se zde autonomie jejich projevu, kterou instruktivistický učitel nepřipouští. Konkrétně toto tvrzení můžeme ilustrovat řešením žákyně *(obr. 4.18),* která v období 1. – 3. třídy navštěvovala třídu, kde jsem byla třídní učitelkou. Ve čtvrtém ročníku prodělala tato dívka více zdravotních obtíží, což způsobilo nutné opakování ročníku. V době experimentu tedy navštěvovala třídu vedenou zcela tradičním způsobem. Dívka nebyla nikdy zdatnou počtářkou, ovšem v jejím řešení je dobře vidět autenticita její práce. Vidí strategii, jak úlohu řešit, ovšem součin čísel 32 a 14 neumí vypočítat podle algoritmu písemného násobení (nebo má zkušenost, že jí tento způsob výpočtu nevyhovuje). Zvolí tedy postup opakovaného sčítání a dostane se k výsledku. Ten je sice chybný, ovšem strategicky správně žákyně pokračuje k dalšímu kroku v procesu řešení, kterým je rozdíl celkové částky za všechny míče a částky za malé míče. Správně tedy (po stránce strategické) určí cenu za velké míče. V tomto okamžiku úlohu ukončí odpovědí, která ale neodpovídá na otázku úlohy. Přesto toto řešení oceňujeme a vnímáme jej jako osobitý způsob dívčina projevu.

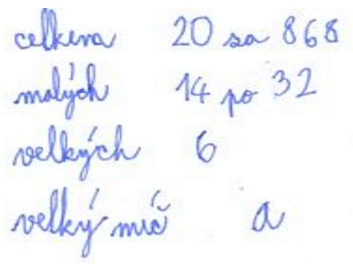


Obr. 4.18

Zda tedy zápisy slovních úloh po žácích vyžadovat, to je často diskutovaná otázka nejen mezi učiteli. Ti, kteří vyučující matematiku tradičním způsobem, na formálních zápisech trvají a argumentují tento postup výše zmíněnou pomocí a prospěšností pro žáka. Jsou pevně přesvědčeni, že žáci nejsou schopni slovní úlohu bez zápisu vyřešit. Z našeho pohledu ovšem není možné žáka naučit ukázkový postup zápisu pouhou imitací učitele bez vlastního porozumění. V našem výzkumu nás zajímalo, jak žáci, jež evidují zápis, slovní úlohu uchopují, konkrétně co a v jakém pořadí je uchopováno. Ukázala se následující skutečnost: Ve třídách vedených tradičně zahájilo proces řešení úlohy zápisem 40 žáků ze 42, což je 95% zkoumaného vzorku. Dále jsme se u těchto žáků zaměřili na skutečnost, kdo z nich má tento formální zápis správně provedený. Za správně provedený zápis považujeme takový zápis, který obsahuje všechna zadaná čísla potřebná pro vyřešení úlohy doplněná správným slovním kontextem. V případě námi zadané slovní úlohy 1 se jednalo konkrétně o čísla 20, 868, 14, 32, která přímo vycházela ze zadání. Správný zápis musí také obsahovat otázku doplněnou o neznámou (nejčastěji písmeno x nebo symbol otazníku), kterou máme vypočítat, v našem případě tedy cenu za jeden velký míč. Ukázku zápisů uvádíme na *obr. 4.19* a *4.20*.



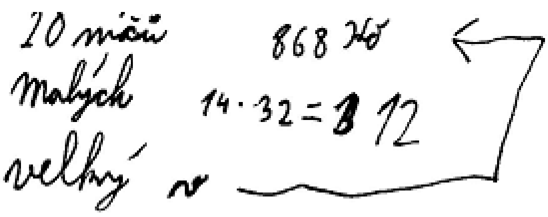
Obr. 4.19



Obr. 4.20

Formálně správně provedený zápis jsme evidovali u 12 žáků ze 42. U jiných 2 žáků se v zápise objevila navíc informace „zbytek byly velké míče“ a další 2 žáci přímo zapsali do zápisu počet velkých míčů (tedy 6), který ze zadání vyplýval nepřímo a žáci jej objevili první početní operací (odečtením množství malých míčů z celkového množství míčů).

Podle zápisu lze usuzovat, jak žáci úlohu uchopují, tedy zda uchopují čísla, nebo idiomy. Za idiom považujeme takovou vazbu, kdy například známe cenu jednoho kusu, množství kusů a tudíž víme, jak spočítáme celkovou cenu – známe algoritmus, jak takové výpočty řešit. Právě tyto idiomy jsou velmi hojně zastoupeny v tradičních učebnicích a žáci jsou v nich intenzivně trénováni. Námi zadaná slovní úloha obsahovala idiom „14 malých míčů po 32 Kč“. U 28 žáků jsme v jejich zápise zaznamenali přesně opsaný idiom ze zadání. Přikládáme to skutečnosti, že se jedná o početní figuru, kterou žáci ve škole často opakují a tím pádem jim nečiní potíže.



Obr. 4.21

U jednoho žáka jsme v zápise analyzovali okamžité převedení idiomu do výpočtu, viz *obr 4.21*.

Z pozdějších rozhovorů s těmito žáky vyplynul důvod, proč zápis u slovních úloh dělají. Není to jejich vlastní potřeba, nýbrž fakt, že je po nich zápis vyžadován paní učitelkou a že jej proto dělat musí. Naší snahou je ukázat, že tento přístup není efektivní a většině žáků zápis nepomáhá v uchopení úlohy a nalezení řešitelské strategie. Ukazuje se, že evidence zápisu bere žákům energii, kterou pak postrádají při provádění výpočtů, nebo jim ubírá čas na samotné řešení a to zejména u delších úloh, kde může být zápis i poměrně komplikovaný. Samozřejmě jsou i tací žáci, kteří řešení znají ihned po přečtení úlohy (řeší úlohu vhledem), takovým zápis pouze bere chuť do práce, jelikož tuto etapu považují za naprosto zbytečnou. Naším názorem je tedy volit přístup zohledňující autonomii žáka a tudíž tyto formální zápisy striktně nevyžadovat. Pokud má ovšem žák pocit, že mu zápis ujasní fakta ze zadání a pomůže nalézt správnou řešitelskou strategii, pak by měl učitel takové žáky povzbuzovat k provádění zápisů. Nemusí se ovšem jednat o formální zápis, jaký znají žáci z běžných učebnic. Zápisem můžeme rozumět také evidenci údajů a odhalení vazeb mezi nimi osobitým způsobem.

Formulace otázky jako součást zápisu

V žákovských zápisech jsme také sledovali, zda žáci správně evidují, co mají vlastně v dané úloze vypočítat. Správně otázku formulovalo ve svém zápise 23 žáků ze 42, tedy přibližně 55% sledovaného vzorku. Toto zjištění pro nás bylo překvapivé, jelikož v zadání úlohy 1 byla z našeho pohledu otázka položena jednoznačně a navíc v samotném závěru úlohy, na což jsou žáci z tradičních učebnic a pracovních sešitů zvyklí. Přesto se v 10 zápisech objevilo slovo „celkem“, čemuž přisuzuje ten důvod, že je to typická a nejčastěji pokládaná otázka ve standardních úlohách. 9 žáků ve svém zápise nezformulovalo, co mají v úloze vypočítat.

Jazyk písmen

V analýzách žákovských řešení jsme dále zjišťovali, jakým způsobem žáci pracují s jazykem písmen a jak si označují neznámé. Sledovali jsme, zda se jedná pouze o formální krok, který se objeví pouze v zápise úlohy, nebo zda s písmenem či jiným symbolem pro neznámou žáci dále pracují v průběhu řešení. V našem vzorku použilo pro vyjádření neznámé 23 žáků nějaké písmeno (x, v, m apod.), z toho 9 těchto žáků pracovalo s neznámou následně i ve výpočtech, ostatní žáci neznámou již nikde nenapsali. 6 žáků použilo symbol otazníku.

Vliv zápisu na proces řešení

V následujících přehledech shrnujeme výsledky na základě analýz žákovských řešení ze dvou paralelních tříd (tradičně vedených).

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb:

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení (4. B)
celkem 24 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">4</td><td>4</td><td rowspan="2">17</td><td>14</td><td rowspan="2">13</td><td>12</td><td rowspan="2">9</td><td>5</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0</td><td>3 (+ 1)</td><td>1 (+ 1)</td><td>3</td></tr>
</table>

Tab. 4.22

Provedení (4. C) celkem 18 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		8		0		2		0	
písemně	vedle sebe	0	0	13	5	8	3	8	3
	pod sebe		0		8		5		4

Tab. 4.23

Provedení (4. B, v %) celkem 24 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		42 %		0 %		8 %		0 %	
písemně	vedle sebe	17 %	17 %	71 %	58 %	54 %	50 %	38 %	21 %
	pod sebe		0 %		13 %		4 %		13 %

Tab. 4.24

Provedení (4. C, v %) celkem 18 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		44 %		0 %		11 %		0 %	
písemně	vedle sebe	0 %	0 %	72 %	28 %	44 %	16 %	44 %	16 %
	pod sebe		0 %		44 %		28 %		22 %

Tab. 4.25

Většinu výpočtů žáci evidovali v písemné podobě, jedinou výjimkou byla vazba α. Můžeme vidět vysokou úspěšnost odhalení vazby β (idiom). Problém naopak činila vazba δ, která vzniká propojením předchozích vazeb α a γ a v zadání není viditelná.

<u>Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb:</u>

Správnost (4. B) celkem 24 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	14	17	13	9
numerická	13	5	12	4

Tab. 4.26

Správnost (4. C) celkem 18 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	7	13	9	7
numerická	7	6	9	6

Tab. 4.27

Správnost (4. B, v %) celkem 24 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	58 %	71 %	54 %	38 %
numerická	54 %	21 %	50 %	17 %

Tab. 4.28

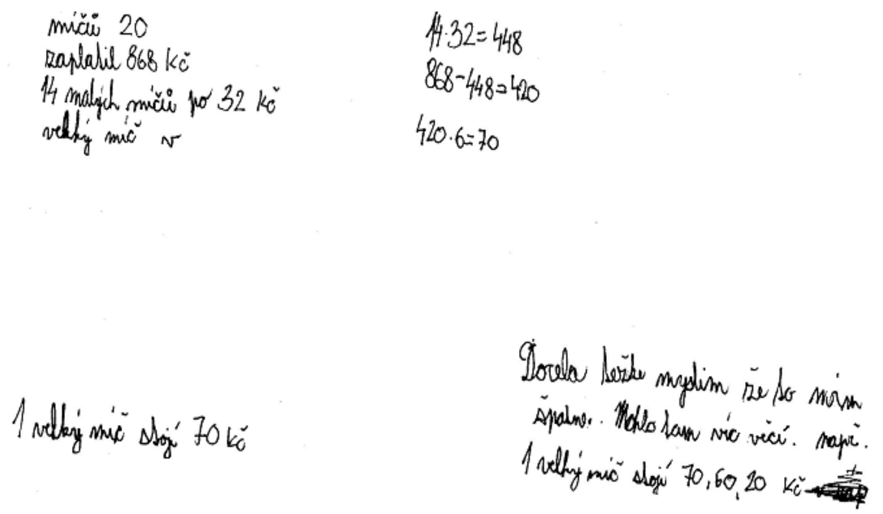
Správnost (4. C, v %) celkem 18 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	39 %	72 %	50 %	39 %
numerická	39 %	33 %	50 %	33 %

Tab. 4.29

Po stránce strategie se v obou třídách ukázal stejný jev – nejvíce jsou žáci úspěšní ve vazbě β, naopak nejméně ve vazbě finální, v δ. Příčinu jsme již vysvětlovali výše. Po stránce numerické jsou hodnoty vyrovnané u α a γ, ve 4. C ještě i u vazby δ. Ovšem velmi výrazný propad sledujeme v numerice ve vazbě β, konkrétně ve 4. B o 50 % a ve 4. C o 39 %.

Ukázky vybraných řešení

Řešení Jakuba *(Obr. 4.22)* Jakub zahájil proces řešení zápisem, který provedl po formální stránce správně (zohlednil v něm všechna čísla ze zadání s příslušným kontextem). Hledaný údaj označil písmenem a pokračoval výpočty, které provedl velmi úsporně. Vazbu α provedl mentálně a správně (což lze vidět ve vazbě δ), další vazby již evidoval písemně. Není jasné, jakým způsobem vypočítal vazbu β. V řešení nebyla patrná známka použití zmizíku, Jakub si tedy neřešil výpočet, který po získání výsledku odstranil. Ve vazbě δ došlo k chybě v zápisu znaku pro početní operaci dělení, která ale nijak neovlivnila výsledek. Co nás ovšem v jeho řešení zarazilo, byl komentář napsaný po vyřešení úlohy[18]. Projevila se nedůvěra ve vlastní řešení a vnitřní pocit i jiných možností řešení úlohy. Domníváme se, že Jakub v tuto chvíli vytěsnil z paměti pevně daný počet velkých míčů (tedy 6), proto navrhoval i jiné ceny za jeden velký míč.

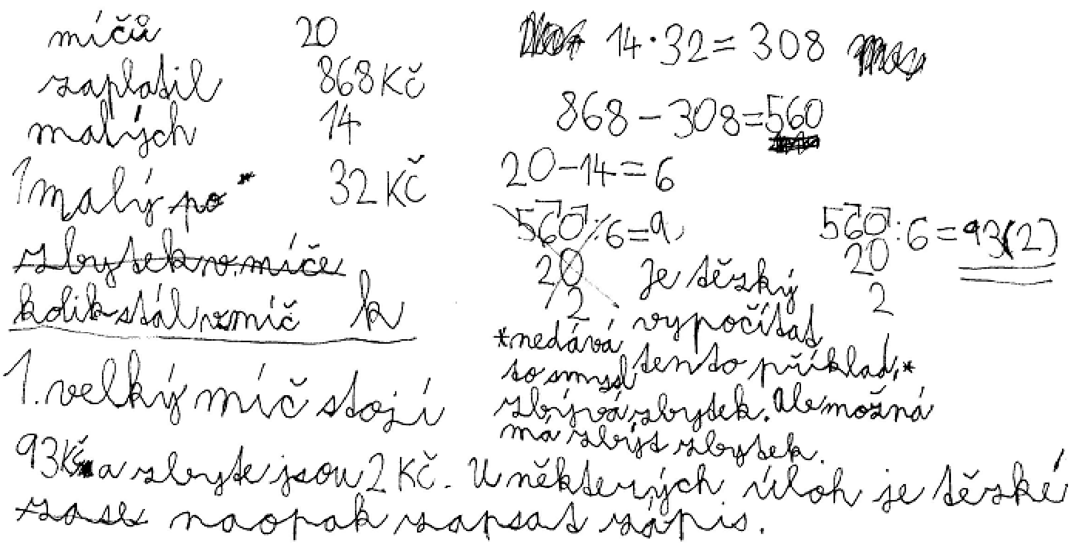


Obr. 4.22

Řešení Kiky *(Obr. 4.23)* V zápise Kiky je zajímavý okamžik škrtnutí fráze „zbytek v. míče“. Dívka si zřejmě ve chvíli dopsání uvědomila, že tato informace nemá být součástí zápisu, jelikož k ní není možné dopsat číselnou hodnotu ze zadání a údaj škrtla. Kristýna začíná vazbou β, kterou neřeší algoritmem písemného násobení dvojciferným

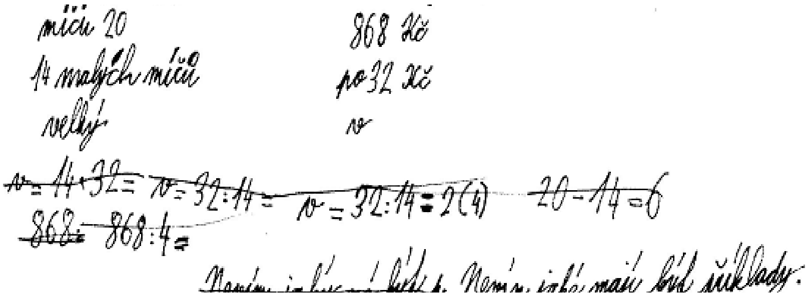
[18] komentáře žáci psali na mou žádost, v hodinách matematiky nejsou zvyklí psát reflexe

činitelem. Její postup je pravděpodobně následující: z čísla 32 vezme jednotky (číslice 2) a roznásobí s jednotkami z čísla 14 (číslice 4). Tím vznikne číslice 8. Pokračuje řádem desítek, tedy součinem 3 a 10, jehož výsledkem je 30. Takto se podle nás dostala k hodnotě 308 (tuto chybu považujeme za dosti častou vzhledem k četnosti jejího výskytu mezi ostatními řešeními). V provedení vazby γ se projeví numerická chyba získaná ve výpočtu vazby β, strategie je v pořádku. Podtrhne výsledek 560, ale uvědomí si, že toto číslo ještě není odpovědí na otázku úlohy, podtržení zaškrtá a pokračuje vazbou α a následně δ. První pokus dělení škrtá, nejspíše ji k tomu vede vycházející zbytek. To se řešitelce nezamlouvá a získá dojem numerické chyby ve svém výpočtu. Začíná znovu, nicméně se dostává ke stejnému problému – stále vychází zbytek. Další kontrolu již neprovede a zapíše odpověď, ve které eviduje zbytek v podobě korun. V komentáři dívka vyjadřuje jednak nejistotu, kterou v ní vyvolal zbytek, jednak občasnou obtíž se zápisem slovních úloh.



Obr. 4.23

Řešení Radky *(Obr. 5.24)* Toto řešení je ukázkou toho, jak písmeno abstrahuje pozornost. Žákyně se snaží něco vypočítat, zkouší početní operace, které se nabízejí. Ze zápisu vidí, že čísla 14 a 32 patří k sobě, ovšem nevidí tu správnou propojující početní operaci. Ve výpočtech dodržuje usazení písmena jako nutného počátečního bodu,



Obr. 4.24

z něhož musí výpočet vycházet. Po několika neúspěšných pokusech dojde ke změně strategie, písmeno je odsunuto do pozadí, dívka se pravděpodobně vrací ke čtení textu. Odhalí vazbu α, dále ví, že musí použít nějakým způsobem veličinu 868 Kč, ovšem neví jak. Úlohu ukončí komentářem, který výstižně ukazuje na neúčinnost zápisu pro úspěšné vyřešení úlohy.

4.2.3 Závěr a reflexe E2

Hlavní výsledky experimentu se týkají tří jevů a tří našich očekávání. První se vztahuje pouze k tradičně vedeným třídám, zbývající pak komparace tříd vedených tradičně a tříd vedených konstruktivisticky.

- První očekávání vychází z přesvědčení učitelek učících tradičně a zní: zápis slovní úlohy napomáhá žákům k jejímu úspěšnému vyřešení.

Očekávání se nepotvrdilo. I když 95% žáků tradičních tříd udělalo zápis úlohy požadovaným způsobem, pouze 14 ze 42 žáků, tedy třetina, byla schopna úlohu uchopit a najít správnou strategii. Domníváme se, že příčinou tohoto jevu je skutečnost, že se žák při uchopování úlohy snaží spíše vyhovět učiteli a uvést předepsaný postup zápisu úlohy, než získat vhled do toho, o čem úloha je, co žádá a jaké informace k tomu nabízí. V té souvislosti je třeba položit otázku o vhodnosti dosti častého způsobu hodnocení žákova řešení, který zápisu úlohy přiřadí určité body. Žák, který již po přečtení úlohy ví, že ji nevyřeší, udělá pěkný zápis, případně i odpověď (s chybným číslem) a nějaké body získá. Naproti tomu žák, který úlohu po svém správně vyřeší, body za zápis úlohy ztratí.

- Druhé očekávání se týká strategie řešení slovní úlohy. Říká, že zde budou žáci vedeni konstruktivisticky úspěšnější, protože mají s touto činností více zkušeností, než žáci z tříd vedených tradičně.

Toto očekávání se potvrdilo a analýza jednotlivých řešitelských postupů ukázala na častou bezradnost žáků vedených tradičně. Jestliže tedy za hlavní didaktický cíl slovních úloh považujeme schopnost žáka vytvořit si do úlohové situace vhled, je toto porovnání tím nejzávažnějším argumentem ve prospěch konstruktivistického vyučování.

- Třetí očekávání se týká numerických schopností žáků. Očekáváme zde vyšší úspěšnost žáků z tradičních tříd, protože v nich se nácviku kalkulace přikládá značná důležitost.

K velikému překvapení se toto očekávání nenaplnilo. Ukázalo se, že navzdory úsilí učitelů naučit žáky dobře počítat, tito se dopouštějí až překvapivých chyb. Jedna z nejpřekvapivějších se týkala písemného násobení $32 \times 14 = 308$. Žák zde násobil způsobem, kterým se sčítá: čísla na pozicích desítek vynásobil a připsal k tomu součin čísel na pozici jednotek. Z uvedeného lze soudit, že nácvik kalkulace postrádající vhled do operace vede k poznání nepevnému, rychle podléhajícímu zapomínání.

Komparace konstruktivistického a tradičního způsobu vyučování, kterou zde uvádíme, vychází z velice omezených dat. V žádném případě nelze na základě těchto čísel dávat obecně validní výpovědi. To, co ale naše porovnávání přináší, je poukaz na smysluplnost většího výzkumu, který by zde evidovaná fakta prověřil obecně. Takový výzkum je ale mimo možnosti jediného výzkumníka.

4.3 Experiment E3: Textová struktura zadání a její modifikace

4.3.1 Příprava a realizace E3

Cíl

Zajímalo nás, jakým způsobem můžeme měnit strukturu zadání slovní úlohy a jak na vybrané modifikace budou žáci reagovat. Připomeňme si původní znění úlohy 1:

Úloha 1:

Honza koupil celkem 20 míčů a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč?

Nyní se podíváme na možnosti, jakými lze původní znění úlohy obměnit:

- **způsob zadání veličin, stavů a vztahů**

Veličiny, stavy a vztahy lze zadat pomocí číslic nebo slov. Pokud je zapíšeme slovně, úloha bude komplikovanější pro ty žáky, kteří mají potíže se čtením s porozuměním. Stává se, že někteří žáci vyjmou čísla ze zadání a začnou s nimi provádět nahodile početní operace ve snaze alespoň něco vypočítat. V tomto případě pro ně bude toto zadání výrazně obtížnější, jelikož čísla na první pohled nejsou vidět. Úloha by vypadala následujícím způsobem:

Úloha 1/I:

Honza koupil celkem dvacet míčů a zaplatil za ně osm set šedesát osm korun. Z toho bylo čtrnáct malých míčů po třiceti dvou korunách a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč?

- **velikost zadaných hodnot**

Další jev ovlivňující obtížnost úlohy, je velikost zadaných hodnot. S rostoucími čísly poroste i náročnost kladená na výpočty. Zadání je následovné:

Úloha 1/II:

Honza koupil celkem 240 míčů a zaplatil za ně 22 416 Kč. Z toho bylo 156 malých míčů po 85 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč?

- **matematické vyjádření zadaných hodnot**

Hodnoty v úloze můžeme zadat různým matematickým vyjádřením. Pokud např. použijeme zlomky nebo desetinná čísla, řešení úlohy je opět náročnější zejména s ohledem na výpočty.

Úloha 1/III:

Honza koupil takový počet míčů, který je roven $\frac{1}{5}$ ze 100 a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo tolik malých míčů, kolik je dvojnásobek 7 a zbytek byly velké míče. Malé míče byly po 32 Kč. Kolik stál velký míč?

- **nadbytečné informace**

Do úlohy můžeme rovněž žákům zadat informace nadbytečné, což bude rozvíjet jejich čtení s porozuměním a práci s informacemi. Je velmi prospěšné takovéto úlohy žákům zadávat a diskutovat s nimi o zadání úlohy. Ukázka takové úlohy:

Úloha 1/IV:

Honza koupil 5 švihadel po 43 Kč a k tomu 20 míčů, za které zaplatil 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč?

- **změna strukturace textu**

Na možnosti změn strukturace textu jsme se zaměřili nejvíce. Zajímalo nás, jaký vliv má právě změna textové struktury (přesun informací) na řešení a potažmo i zápis slovní úlohy. Změny ve struktuře jsme učinili na základě analýz žákovských zápisů z tradičně vedených tříd (viz. podkapitola 4.2.2). Většina žákovských zápisů začínala spojením z úvodní věty, tedy „20 míčů za 868 Kč“. Proto jsme učinili první změnu takovou, že jsme tyto dvě hodnoty od sebe oddělili a celkovou částku přesunuli až na konec úlohy. Úloha poté vypadala následovně:

Úloha 1/A:

Honza koupil celkem 20 míčů. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když za všechny zakoupené míče zaplatil Honza 868 Kč?

V této variantě je obtížnější spojit si celkové množství míčů s celkovou částkou, proti tomu je zde ale blízko sebe uvedené celkové množství míčů a množství malých míčů.

V následující variantě 1/B jsme odstranili spojení „14 malých míčů po 32 Kč“, které se v zápisech žáků objevovalo rovněž takto pohromadě (viz výše ukázky žákovských zápisů). Tuto formulaci žáci dobře znají z učebnic, kde jsou úlohy velmi často tímto způsobem zadávány. Přesně takto formulovaná část zápisu se v námi sledovaném vzorku objevila 31krát ze 42 řešení. Ostatní žáci uváděli buď částku 32 Kč k jednomu míči (9 případů), nebo tuto informaci neuvedli vůbec (2 případy). Upravené zadání:

<u>Úloha 1/B:</u>

Honza koupil celkem 20 míčů a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po 32 Kč?

Varianta 1/C obsahuje kombinaci výše uvedeného. Roztrhli jsme vazbu 20 míčů za 868 Kč a 14 malých míčů po 32 Kč. Zadání vypadá následovně:

<u>Úloha 1/C:</u>

Honza koupil celkem 20 míčů. Z toho bylo 14 malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po 32 Kč a za všechny zakoupené míče zaplatil Honza 868 Kč?

Další modifikace úlohy lze vytvořit různým kombinováním předchozích variant, např. kombinací úlohy 1/I a 1/C získáme takovéto zadání:

<u>Úloha 1/IC:</u>

Honza koupil celkem dvacet míčů. Z toho bylo čtrnáct malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po třiceti dvou korunách a za všechny zakoupené míče zaplatil Honza osm set šedesát osm korun?

Ukázali jsme, jak široké možnosti nabízí jedna slovní úloha. Učitel může pomocí těchto modifikací diferencovat výuku ve třídě a zadávat žákům různě obtížné úlohy. Navíc se zde otevírá prostor k vzájemné diskusi, jelikož úlohy pracují se stejným kontextem a pouze odlišným vyjádřením. Na ně mohou žáci poukazovat a zároveň srovnávat řešitelské strategie.

Cílová skupina

V tomto experimentu jsme modifikovaná textová zadání předložili dvěma pátým ročníkům a zároveň mým páťákům. Opět jsme chtěli srovnat třídy tradiční s konstruktivistickými.

Forma práce, způsob zadání

Zadání úlohy bylo natištěno na volném papíře. Doplňující informace pro dvě paní učitelky z jiné školy poskytly informaci, že modifikace C je nejobtížnější a měly by ji zadat nejlepším žákům.

Způsob sběru dat

Data byla tvořena sebranými žákovskými řešeními. Hodina nebyla dokumentována prostřednictvím videonahrávky. Nebyl přítomen externí pozorovatel.

4.3.2 Analýza dat

Úloha 1/A

Honza koupil celkem 20 míčů. Z toho bylo 14 malých míčů po 32 Kč a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když za všechny zakoupené míče zaplatil Honza 868 Kč?

<u>Evidence výpočtů jednotlivých vazeb (třídy tradiční):</u>

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení T
celkem 10 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">2</td><td>2</td><td rowspan="2">7</td><td>3</td><td rowspan="2">4</td><td>3</td><td rowspan="2">6</td><td>3</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr>
</table>

Tab. 4.30

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení T (v %)
celkem 10 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">70 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">20 %</td><td colspan="2">0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">20 %</td><td>20 %</td><td rowspan="2">70 %</td><td>30 %</td><td rowspan="2">40 %</td><td>30 %</td><td rowspan="2">60 %</td><td>30 %</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0 %</td><td>40 %</td><td>10 %</td><td>30 %</td></tr>
</table>

Tab. 4.31

<u>Evidence výpočtů jednotlivých vazeb (třídy konstruktivistické):</u>

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení K
celkem 8 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">4</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">3</td><td>1</td><td rowspan="2">7</td><td>0</td><td rowspan="2">7</td><td>2</td><td rowspan="2">7</td><td>1</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>2</td><td>7</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table>

Tab. 4.32

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení K (v %)
celkem 8 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">50 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">0 %</td><td colspan="2">0 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">38 %</td><td>13 %</td><td rowspan="2">88 %</td><td>0 %</td><td rowspan="2">88 %</td><td>25 %</td><td rowspan="2">88 %</td><td>13 %</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>25 %</td><td>88 %</td><td>63 %</td><td>75 %</td></tr>
</table>

Tab. 4.33

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb (třídy tradiční):

Správnost T celkem 11 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	9	7	6	6
numerická	9	4	6	5

Tab. 4.34

Správnost T (v %) celkem 11 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	90 %	70 %	60 %	60 %
numerická	90 %	40 %	60 %	50 %

Tab. 4.35

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb (třídy konstruktivistické):

Správnost K celkem 8 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	7	7	7	7
numerická	7	7	7	6

Tab. 4.36

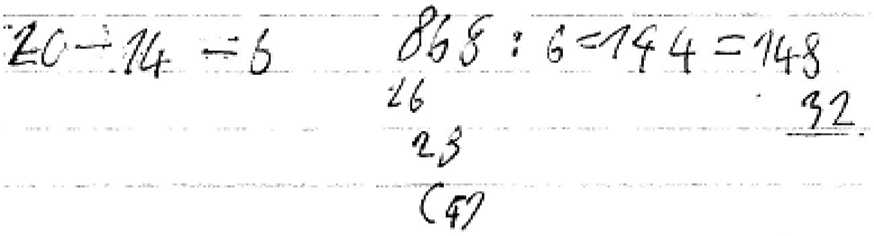
Správnost K (v %) celkem 8 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	88 %	88 %	88 %	88 %
numerická	88 %	88 %	88 %	75 %

Tab. 4.37

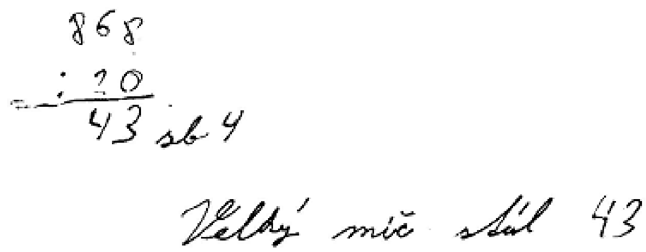
V této úloze žáci nejsnáze odhalovali vazbu α. Vysvětlujeme to skutečností, že čísla 20 a 14, vedoucí k vyřešení této vazby, stála v úvodu zadání a vedle sebe. Tradiční třídy měly 90 % úspěšnost. V konstruktivisticky vedených třídách byla evidence všech vazeb vyrovnaná (88 %). Shodně ve všech získaných řešeních převažovala písemná evidence, pouze u α byl nepatrně četnější písemný záznam v konstruktivistické třídě. Správnost strategická i numerická je u ní, s výjimkou propadu u numeriky ve vazbě δ, totožná a relativně vysoká. Nejvýraznější pokles vidíme v numerice v tradičních třídách ve vazbě β. Znovu se potvrzuje vysoká chybovost v kalkulu u této vazby. Co se týká strategické správnosti vazby β, očekávali jsme u tradičních tříd vyšší úspěšnost vzhledem k častému nácviku početní operace tohoto spoje.

Ukázky vybraných řešení z tradičně vedených tříd

Řešení Čeňka *(Obr. 4.25)* U žáka Čeňka proběhlo správné uchopení vazby α, dalším krokem byl výpočet 868 : 6, tedy celková částka vydělená počtem velkých míčů, což je vysvětlitelné – v jeho hlavě výpočet vytěsní skutečnost, že za malé míče se také musela nějaká částka zaplatit a tu musíme od celkové částky odečíst. Žák vidí, že výpočet vychází se zbytkem, který přičte k podílu. V tento okamžik se pravděpodobně vrátil k textu úlohy, kde si všiml, že v něm figuruje ještě veličina 32 Kč, se kterou zatím nepracoval. Navíc si je vědom algoritmu, který k této veličině patří, tedy násobení (…“míčů po 32 Kč“…). Příklad zapíše a tím své řešení končí, pravděpodobně z časových důvodů. Pokud by měl tento žák k dispozici kalkulačku, domníváme se, že by zjistil chybu ve svém řešení, jelikož by mu vycházela částka, která několikrát překračuje částku zadanou v úloze.



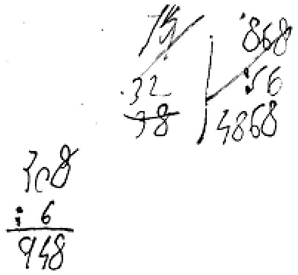
Obr. 4.25



Obr. 4.26

Řešení Ivana *(Obr. 4.26)* Ivan úlohu řešil způsobem, kdy vzal celkovou částku za všechny míče a tu vydělil počtem všech míčů. Výsledek tohoto dělení mu vyšel početně správně, způsob provedení nám není jasný. Jeho mysl se pravděpodobně zaměřila na první a poslední větu, s prostřední větou a v ní obsaženými informacemi vůbec nepracoval.

Řešení Libora *(Obr. 4.27)* Zajímavostí v řešení Libora je fakt, že se minimálně dvakrát pokoušel o vypočítání vazby β, kterou pravděpodobně početně nezvládl a vše vyzmizíkoval (lze vidět na originálu). V jeho mysli se ovšem projevovala určitá jistota toho, že tato vazba se musí vypočítat násobením, na které ale žák nestačí a je si toho vědom. Tento pokus už nechává na papíře a jen ho škrtá. Přesouvá se k dělení (vazba δ), do které ovšem vstupuje chybně – bere celkovou částku 868 a tu dělí 6. Tento krok je vysvětlitelný (viz výše – soustředí se na první a poslední větu). Způsob zápisu je chybně – eviduje dělení pod sebe, které je navíc špatně vypočítané. Výpočet škrtá. Poté se dle našeho názoru dostává k dalšímu pokusu,

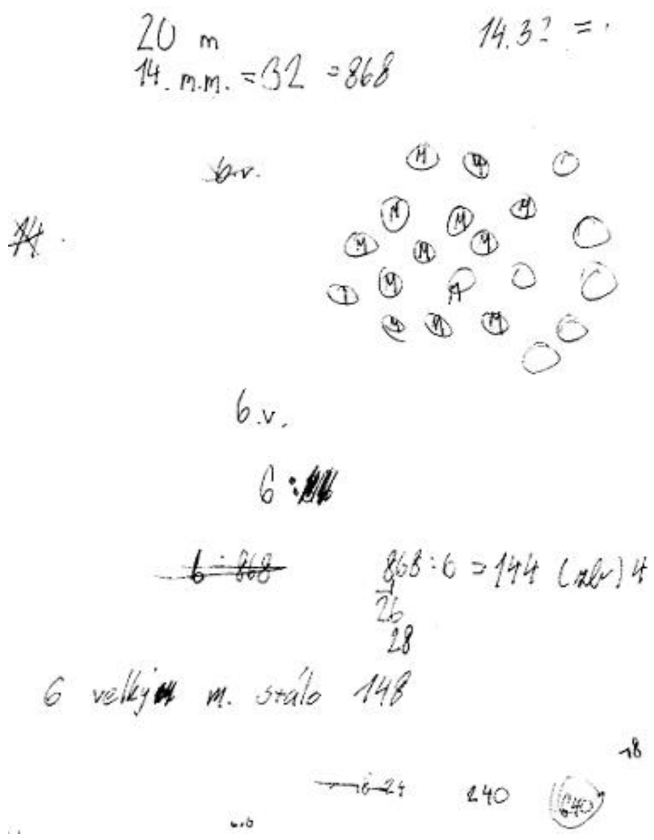


Obr. 4.27

kdy vezme číslo 308 (to se objevovalo u vyzmizíkovaného pokusu písemného roznásobení 32 × 14) – náznak přesvědčení, že toto by mělo být v úloze asi dobře, které opět dělí 6 a opět v zápisu pod sebou, které je navíc znovu chybně. Tento žák pravděpodobně ztrácí většinu energie na provádění výpočtů, která poté chybí na udržení strategie a fungování logiky.

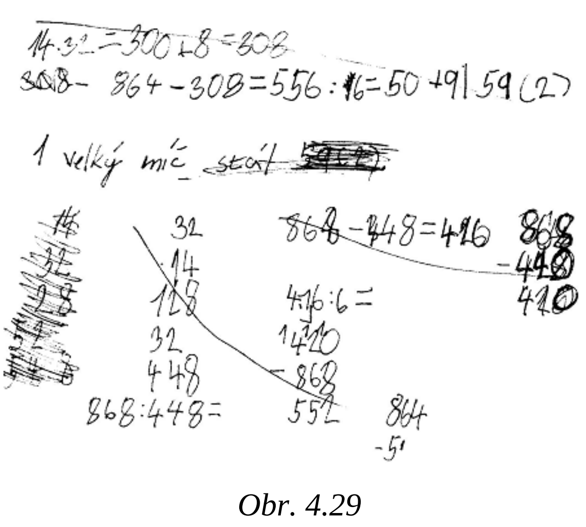
Řešení Oliny *(Obr. 4.28)*

U Oliny je součástí řešení vazby α vizualizace míčů a jejich rozdělení na velké a malé. Vazba β působí nejistě. Jednou (v pravém horním rohu) ji má strategicky správně uchopenou, bez výsledku. V evidenci údajů správně přiřazuje čísla 14 a 32 k sobě, chybně k nim ovšem přiřadí 868. Přesouvá se na dělení (vazba δ), kde se dopouští stejné chyby jako Libor – bere celkovou částku za všechny míče a tu dělí počtem velkých míčů. Navíc nerozumí operaci dělení, jelikož výpočet je numericky správně, ale odpověď chybná. Opět je přičítán zbytek k podílu.



Obr. 4.28

Řešení Soni (Obr. 4.29)

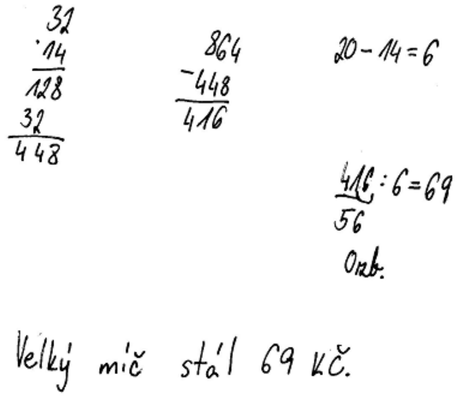


Obr. 4.29

U Soni je patrná velká snaha úlohu vyřešit. Zároveň si je vědoma nejistoty v numerice. Několikrát se vrací ke stejným úlohám a výsledky se liší, což vyvolává snahu o nový pokus a kontrolu. Celková strategie této řešitelky je správná, potíž je v provádění výpočtů, které vedou k nedůvěře v sebe sama a nedořešení úlohy.

Ukázka řešení z konstruktivisticky vedených tříd

Řešení Natky *(Obr. 4.30)* Na této ukázce je pěkně vidět tok myšlenkového procesu. Natka začíná výpočtem idiomu (vazba β), který je v této variantě zadání u sebe. Pokračuje využitím získaného výsledku k vyřešení vazby γ. Tady dojde k numerické chybě, konkrétně k chybnému přepisu čísla – místo 868 napíše 864. Tato chyba se projeví nutně ve vazbě δ, kde je navíc ještě další chyba ve zbytku. Strategie celého řešení je správně.



Obr. 4.30

Úloha 1/B

Honza koupil celkem 20 míčů a zaplatil za ně 868 Kč. Z toho bylo 14 malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po 32 Kč?

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb (třídy tradiční):

Provedení T celkem 11 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		7		0		1		0	
písemně	vedle sebe	0	0	7	2	6	3	6	3
	pod sebe		0		5		3		3

Tab. 4.38

Provedení T (v %) celkem 11 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		64 %		0 %		10 %		0 %	
písemně	vedle sebe	0 %	0 %	64 %	30 %	54 %	27 %	54 %	27 %
	pod sebe		0 %		40 %		27 %		27 %

Tab. 4.39

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb (třídy konstruktivistické):

Provedení K celkem 11 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		6		0		0		0	
písemně	vedle sebe	3	3	10	0	9	1	9	0
	pod sebe		0		10		8		9

Tab. 4.40

Provedení K (v %) celkem 11 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		54 %		0 %		0 %		0 %	
písemně	vedle sebe	27 %	27 %	91 %	0 %	82 %	9 %	82 %	0 %
	pod sebe		0 %		91 %		73 %		82 %

Tab. 4.41

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb (třídy tradiční):

Správnost T celkem 11 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	7	7	7	6
numerická	7	4	7	5

Tab. 4.42

Správnost T (v %) celkem 11 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	64 %	64 %	64 %	55 %
numerická	64 %	36 %	64 %	45 %

Tab. 4.43

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb (třídy konstruktivistické):

Správnost K celkem 8 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	9	10	9	9
numerická	9	10	9	9

Tab. 4.44

Správnost K (v %) celkem 8 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	82 %	91 %	82 %	82 %
numerická	82 %	91 %	82 %	82 %

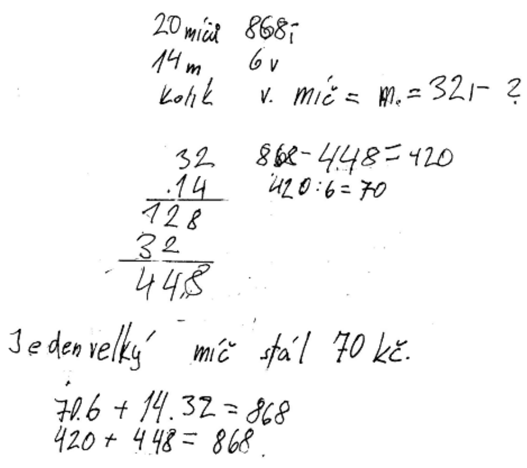
Tab. 4.45

Ve variantě B klesla úspěšnost uchopení vazby α u tradičních tříd. Vysvětlujeme si to úpravou zadání, kde čísla potřebná pro vyřešení vazby nestojí těsně vedle sebe. Znovu došlo k obrovskému propadu v numerice u tradičních tříd ve vazbě β, úspěšnost u α a γ je stejná, přesto proti konstruktivisticky vedeným třídám podstatně nižší.

Ukázky vybraných řešení z tradičně vedených tříd

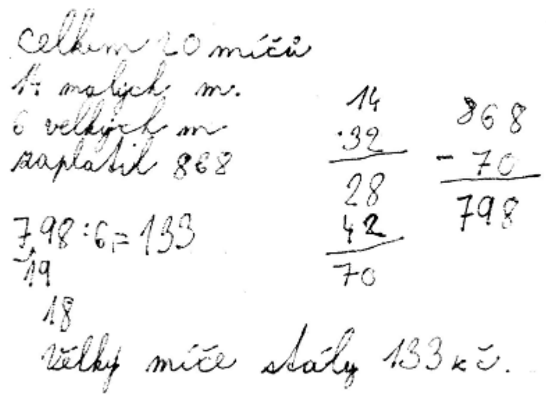
Řešení Veroniky *(Obr. 4.31)*

Veronika si dělá zápis svým vlastním způsobem. Myslíme si, že by jiný žák ze zápisu neporozuměl, co je vlastně cílem úlohy. Proces řešení zahajuje řešitelka vazbou β, pokračuje γ a δ a získá výsledek. Po zapsání odpovědi provede kontrolu – dosadí správně potřebné hodnoty do rovnice, která funguje. Úloha je tedy správně vyřešena.



Obr. 4.31

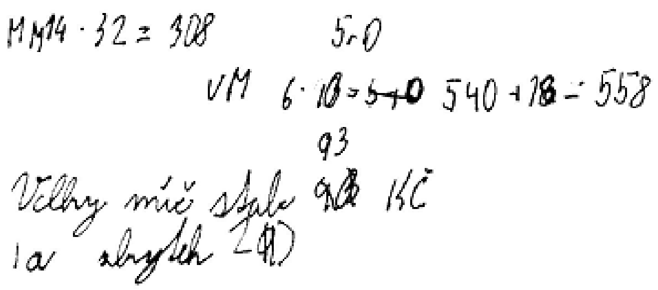
Řešení Emy *(Obr. 4.32)* Její strategie řešení byla zcela správná, ovšem dopustila se početní chyby ve vazbě β, která se dále táhla celým řešením. Znovu se ukázala problematičnost výpočtu této vazby, tentokrát byl správně roznásoben počet jednotek z čísla 32, dále se pozornost sice přesunula na řád desítek, ovšem ve špatném činiteli (tedy do čísla 14 namísto 32). Ema roznásobila 1 × 2, 1 × 4 (tím vzniklo číslo 42). I Ema patří ke skupině žáků, kterým by kalkulačka umožnila úlohu správně vyřešit.



Obr. 4.32

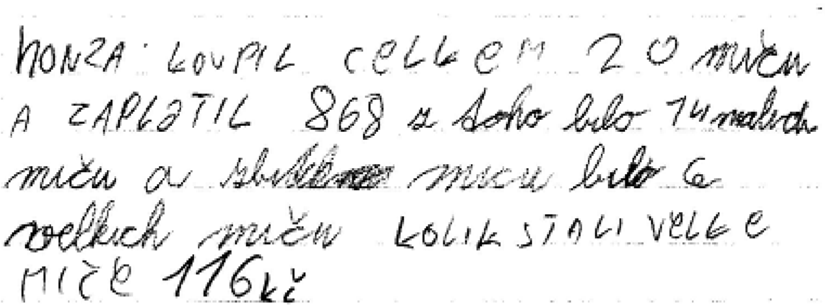
Řešení Markéty *(Obr. 4.33)*

Řešení Markéty je zajímavé ve způsobu řešení vazby δ, které realizuje metodou pokus – omyl. Zapíše si počet velkých míčů (tedy 6) a částku, která odpovídá právě těmto 6 míčům. Následuje hledání, kolikrát se 6 vejde do 560. Nejbližší násobek je 90, když ale vynásobí 6 × 90, vyjde součin 540, tedy do 560 ještě 20 zbývá. Nejbližší násobek 6 menší než 20 je 18, který rozdělí na šestiny a jednu šestinu přidá ke svému předchozímu výsledku. Její odpověď je tedy 93 a zbytek 2, který nedokázala již nikam rozdělit.



Obr. 4.33

Řešení Miloše (Obr. 4.34) Miloš opisuje zadání. Můžeme se pouze domnívat, co se odehrává v jeho hlavě po přečtení textu. Žák úlohu pravděpodobně neuchopil. Neví, co po něm úloha chce. Proto začíná přepisovat zadání s nadějí, že se mu podaří porozumět úloze. V našem případě je žák částečně úspěšný, jelikož v okamžiku, kdy přepisuje text „zbytek byly velké míče“ dojde k vytvoření agramatismu. Po slově „byly“ proběhl v hlavě myšlenkový proces 20 – 14 = 6 a konec věty

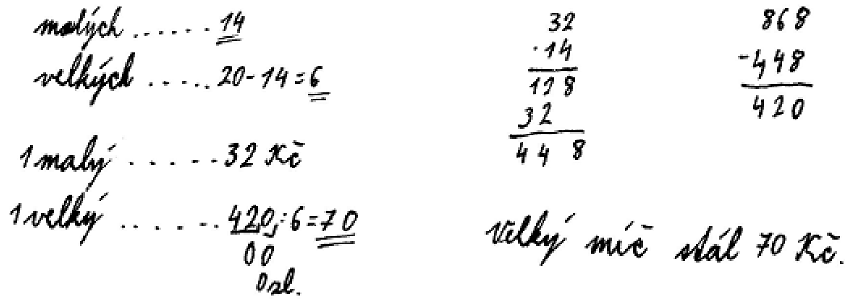


Obr. 4.34

je právě prezentací dílčího výsledku 6. Otázku má chybně přepsanou, v závěru se navíc objeví číslo 116, jehož původ neznáme.

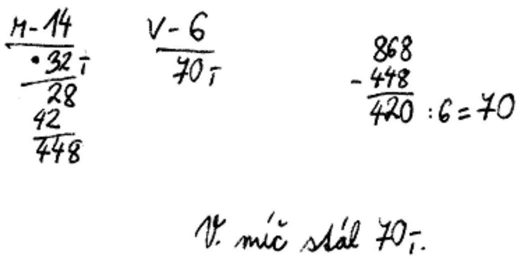
Ukázky vybraných řešení z konstruktivisticky vedených tříd

Řešení Tiny *(Obr. 4.35)* Tina je žákyně, která byla vedena do třetí třídy tradičním způsobem, což se projevuje v návyku provádět zápis. V tomto případě se ale nejedná o nutnou a formální část, zápis zde plný svou funkci a napomáhá získat vhled do struktury úlohy. Tina si přímo do něj eviduje dílčí výpočty a výsledky.



Obr. 4.35

Řešení Anety *(Obr. 4.36)* Další ukázka toho, jakým způsobem si žáci úlohu mohou řešit. Aneta patří mezi žáky, kteří si pravidelně dělají do výpočtů komentáře, což se zde projevuje v podobě písmen M a V, tedy její myšlenkový tok se diferencuje na dva proudy – nejprve řeší malé míče, teprve následně velké míče.



Obr. 4.36

Úloha 1/C

Honza koupil celkem 20 míčů. Z toho bylo 14 malých míčů a zbytek byly velké míče. Kolik stál velký míč, když malé míče byly po 32 Kč a za všechny zakoupené míče zaplatil Honza 868 Kč?

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb (třídy tradiční):

<table>
<tr><td colspan="2">Provedení T
celkem 10 žáků</td><td colspan="2">Vazba α
20 – 14 = 6</td><td colspan="2">Vazba β
32 × 14 = 448</td><td colspan="2">Vazba γ
868 – 448 = 420</td><td colspan="2">Vazba δ
420 : 6 = 70</td></tr>
<tr><td colspan="2">mentálně</td><td colspan="2">6</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">písemně</td><td>vedle sebe</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td rowspan="2">8</td><td>1</td><td rowspan="2">4</td><td>3</td><td rowspan="2">4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>pod sebe</td><td>0</td><td>7</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

Tab. 4.46

Provedení T (v %) celkem 10 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		60 %		0 %		20 %		0 %	
písemně	vedle sebe	10 %	10 %	80 %	10 %	40 %	30 %	40 %	20 %
	pod sebe		0 %		70 %		10 %		20 %

Tab. 4.47

Evidence výpočtů jednotlivých vazeb (třídy konstruktivistické):

Provedení K celkem 6 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		4		0		1		0	
písemně	vedle sebe	1	1	6	0	5	1	5	0
	pod sebe		0		6		4		5

Tab. 4.48

Provedení K (v %) celkem 6 žáků		Vazba α 20 – 14 = 6		Vazba β 32 × 14 = 448		Vazba γ 868 – 448 = 420		Vazba δ 420 : 6 = 70	
mentálně		67 %		0 %		17 %		0 %	
písemně	vedle sebe	17 %	17 %	100 %	0 %	84 %	17 %	84 %	0 %
	pod sebe		0 %		100 %		67 %		84 %

Tab. 4.49

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb (třídy tradiční):

Správnost T celkem 10 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	7	8	6	4
numerická	7	5	6	4

Tab. 4.50

Správnost T (v %) celkem 10 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	70 %	80 %	60 %	40 %
numerická	70 %	50 %	60 %	40 %

Tab. 4.51

Strategická a numerická správnost výpočtů jednotlivých vazeb (třídy konstruktivistické):

Správnost K celkem 6 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	5	6	6	5
numerická	5	5	6	5

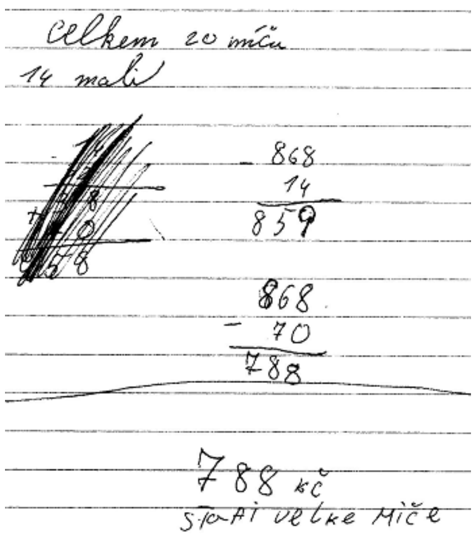
Tab. 4.52

Správnost K (v %) celkem 6 žáků	Vazba α 20 – 14 = 6	Vazba β 32 × 14 = 448	Vazba γ 868 – 448 = 420	Vazba δ 420 : 6 = 70
strategická	83 %	100 %	100 %	83 %
numerická	83 %	83 %	100 %	83 %

Tab. 4.53

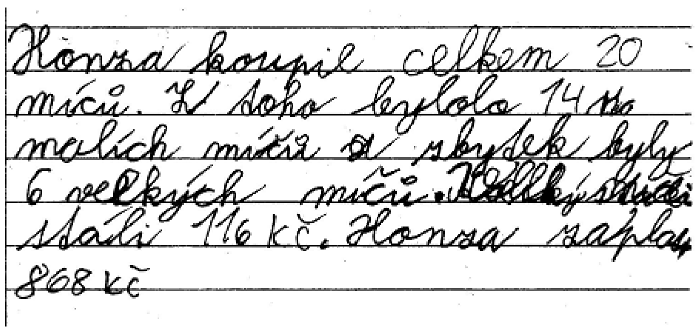
V tradičních třídách jsme zaznamenali největší úspěšnost ve strategii ve vazbě β a to přesto, že byl v této variantě roztržen idiom. Numerická úspěšnost opakovaně poklesla, v tomto případě pouze u této jedné vazby. V konstruktivisticky vedených třídách činila mírné potíže vazba α a δ, konkrétně se jednalo o jedno chybné řešení z 6. Velké problémy působila v tradičních třídách rovněž vazba δ, zejména její uchopení, které bylo proti konstruktivistickým třídám na poloviční hodnotě.

Ukázky vybraných řešení z tradičně vedených tříd



Obr. 4.37

Řešení Pavla *(Obr. 4.37)* Pavel začal své řešení evidencí dvou údajů, které vyčetl ze zadání ihned v úvodu. Poté se pustil do řešení vazby β, kterou ale nedokázal vypočítat, výsledek i celý příklad zaškrtává. Vezme celkovou částku za všechny míče a odečítá počet malých míčů, tudíž spojuje veličinu a stav, který k sobě nepatří. Pokračuje dalším odčítáním, kdy opět od celkové částky (největší číslo) odečítá 70. Tomuto kroku nerozumíme, jelikož není jasné, jakým způsobem toto číslo zjistil a ani co vlastně představuje. Odpověď navíc špatně formuluje.



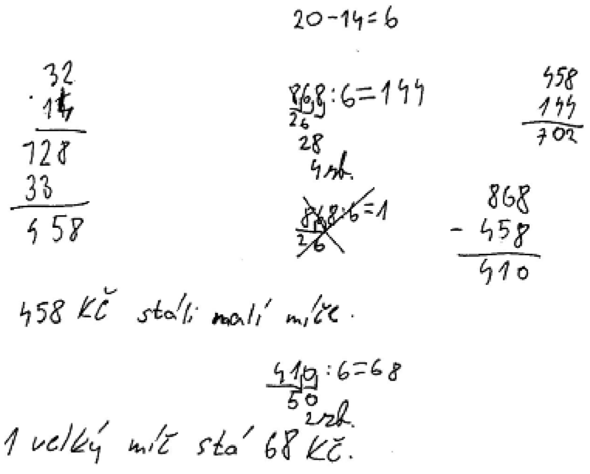
Obr. 4.38

Řešení Ondřeje *(Obr. 4.38)*

Ondřej své řešení zahajuje přepisováním zadání (podobný postup jsme viděli již u Františka, viz výše). Žák úlohu pravděpodobně neuchopil. Neví, co po něm úloha chce. Proto začíná přepisovat zadání s nadějí, že se mu podaří porozumět úloze. U tohoto žáka agramatismus není, neproběhl AHA efekt. Můžeme se domnívat, že tento žák opisovat od souseda (viz žák František analyzovaný výše). Následuje kolaps, nejsme schopni dešifrovat, jaký myšlenkový krok vedl řešitele k číslu 116. Pokud ovšem tento žák neopisoval, tak je jeho intelektuální výkon výše než u žáka Františka vzhledem ke znění zadání, kde jsou hodnoty v této posloupnosti: (20 – 868 – 14) versus (20 – 14 – 868) – je to ovšem polemika. Nevíme, zda tito žáci seděli v okamžiku řešení úlohy vedle sebe. Pokud tomu tak bylo, je možné, že mohli navzájem opisovat, přestože každý měl zadání jiné. Pokud by tomu tak nebylo a Ondřej by postupoval samostatně, bylo by jeho myšlení o krok výše a to vzhledem k tomu, že objevit počet velkých míčů bylo v tomto zadání C náročnější než v zadání B.

Ukázky vybraných řešení z konstruktivisticky vedených tříd

Řešení Gáby (Obr. 4.39) Na této ukázce můžeme vidět jednak numerickou chybu ve výpočtu vazby β, jednak hledání správné strategie. Pravděpodobně došlo k tomu, že řešitelka ztratila kontext k číslu 458. Po dělení, které vycházelo se zbytkem, se pokusila o kontrolní součet, který ale provedla strategicky chybně. Domníváme se, že v tento okamžik se vrátila k textu úlohy a uvědomila si, co vlastně určuje hodnota 458 a zapsala si to. Pokračovala strategicky již správně, ovšem podíl vyšel se zbytkem, který řešitelka nijak nezohlednila v odpovědi.



Obr. 4.39

4.3.3 Závěr a reflexe E3

Tento experiment mi opět ukázal další možnosti práce se slovní úlohou. Znovu jsem si za základní nástroj vybrala slovní úlohu 1, ke které jsem na základě výsledků z E2 vytvořila varianty pomocí změny struktury zadání.

Ukázalo se, že přesun údajů v zadání ovlivňuje spíše řešitele z tradičních tříd. U nich byly výsledky v uchopování vazeb a v numerice více rozkolísané, kdežto u žáků vedených konstruktivisticky nedošlo v žádném případě k zásadnímu propadu. Opakovaně se mi ukázala jako nejvíce početně problémová vazba β (32 × 14). Ovšem je zajímavé, že nebyl problém rozpoznat strategii této vazby i přesto, že idiom byl roztržen, tudíž čísla 32 a 14 nestála vedle sebe.

Tato situace nás přivedla k myšlence (a potenciálně dalšímu výzkumu), jak by se změnila řešitelská úspěšnost u žáků, kteří by používali kalkulačku. Domníváme se, že by právě kalkulačky pomohly žákům, kteří energii spotřebují na provádění výpočtů. Takových žáků by bylo v našem výzkumu několik. Kdo z žáků si je vědom skutečnosti svých problémů s numerikou, tak v okamžiku, kdy uvidí velká čísla, dostane se pod tlak v očekávání vlastních numerických chyb a udělá chybu již v uchopování. Technologická zátěž omezí logiku. Pokud zbavíme žáka technologické zátěže, zvýšíme tím výkon logiky a úspěšnost žáka. Jsme přesvědčeni, že právě tito žáci by úlohu s pomocí kalkulačky vyřešili zcela správně a bylo by zároveň posíleno jejich sebevědomí.

Nový jev, který se v analýzách objevil, byl agramatismus. Během žákova opisování textového zadání úlohy, což mohlo být ve snaze úlohu uchopit, došlo k „AHA“ efektu: žák opisoval text a náhle se mu vynořil výsledek dané vazby, který připsal do toku zadání. Poté pokračoval dál. Opisování (repetice) je pro některé žáky důležitá metastrategie, která jim dodává naději, že se jim během opisování podaří úlohu uchopit.

Těžkosti mi tento experiment přinesl ihned na počátku. Nedařilo se mi najít paní učitelky, které by byly ochotny se do mého výzkumu zapojit. Pravděpodobně se obávaly možného neúspěchu vlastních žáků, ze kterého bych případně vyvozovala nějaké závěry o jejich pedagogické práci. Po několika neúspěšných snahách a opakovaném vysvětlení, co je záměrem tohoto experimentu, se mi podařilo najít dvě paní učitelky, které byly ochotny zadat úlohy svým žákům. Zda dodržely mé pokyny, tedy aby dětem nijak neradily a rozdělily modifikace podle výkonů svých žáků (tedy I/C těm nejlepším), můžu pouze usuzovat. Každopádně velký přínos tohoto experimentu vidím pro svou vlastní praxi. Podobné modifikace jsem začala pravidelně vytvářet svým žákům a využívat je i do písemek. Sami žáci si mohou rozhodnout, kterou variantu úlohu si zvolí a za jejíž řešení přijímají odpovědnost. Pro mě jako učitele je sice následné opravování výrazně časově náročnější, ovšem díky této činnosti se mi daří lépe poznávat myšlenkové procesy svých žáků a případně jim vytvářet úlohy „na míru“ podle aktuálních potíží v jejich řešení.

4.4 Experiment E4: Použití kalkulaček

Tento experiment byl realizován v závěrečné etapě sepisování práce zejména jako reakce na výstupy z předcházejících experimentů. Jeho výsledky nejsou tak detailně zpracovány, nicméně nám přesto připadaly zajímavé a pro naše účely dostatečně vypovídající. Pro potřeby tohoto experimentu jsem vytvořila slovní úlohu, která vypadala následujícím způsobem, označíme ji jako úlohu 2:

<u>Úloha 2:</u>

Petra kupovala do tělocvičny stejný počet švihadel a obručí. Kolik Kč stálo švihadlo, jestliže za 12 obručí zaplatila 1 140 Kč a celková suma za nákup činila 1 896 Kč?

Díky této úloze můžeme pozorovat následující oblasti:

- Čtení s porozuměním: Zásadní význam v úloze má slovo „stejný“. Pokud žák toto slovo nereflektuje, nemůže úlohu správně vyřešit.
- Strategie: Pro úspěšné vyřešení úlohy není potřebné počítat cenu jedné obruče, stačí zjistit celkovou částku připadající na všechna zakoupená švihadla a vydělit jejich počtem. Nejkratší strategie tedy vede přes rozdíl a následně podíl.
- Numerika: Vyšší čísla s sebou nesou vyšší náročnost na numeriku.

Úlohu jsem předložila opět ve třídách, kde vyučuji matematiku (začátek května 2015). Jedna třída (5. A, má kmenová) dostala zadání úlohy a k němu informaci, že mohou využívat během řešení kalkulačky, což ovšem není povinné. Pokud je někdo nebude chtít využít, nemusí. Žáky jsem zároveň požádala, aby ke svým řešením napsali komentáře, co pro ně možnost pracovat s kalkulačkou znamená, a aby označili ve svých řešeních, co počítali s kalkulačkou a co naopak sami. Druhá třída (5. B) počítala stejnou úlohu, žáci ovšem neměli k dispozici kalkulačky.

Očekávala jsem vyšší řešitelskou úspěšnost v 5. A, zároveň jsem ale předvídala, že ne všichni žáci možnost kalkulačky využijí.

4.4.1 Analýza dat

5.A

Celkem úlohu řešilo 31 žáků. Zcela správně ji vyřešilo 25 žáků, což je 81 %. Správné řešení s numerickou chybou jsme evidovali jednou, 3%. Řešení strategicky chybná se objevila v pěti případech, to je 16 %.

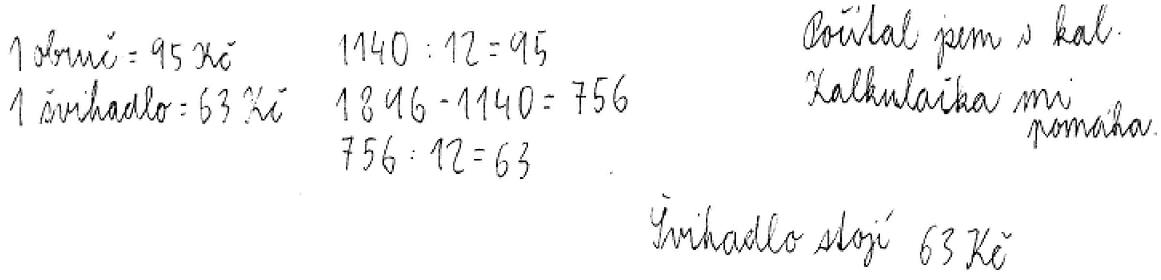
Zjištění na základě analýz:

- Zcela správná řešení (25 řešení):
  - Veškeré výpočty bez kalkulačky: 2 žáci
  - Kalkulačka pouze pro kontrolu: 8 žáků
  - Jeden výpočet s kalkulačkou: 8 žáků, všichni shodně u dělení
  - Vše s kalkulačkou (oba výpočty, případně tři): 7 žáků
- Správná strategie, numerická chyb (1 řešení):
  - Jeden výpočet s kalkulačkou, chyba v předchozím výpočtu: 1 žák
- Chybná strategie (5 řešení):
  - Veškeré výpočty bez kalkulačky: 2 žáci
  - Kalkulačka pouze pro kontrolu: 2 žáci
  - Vše s kalkulačkou (oba výpočty, případně 3): 1 žák

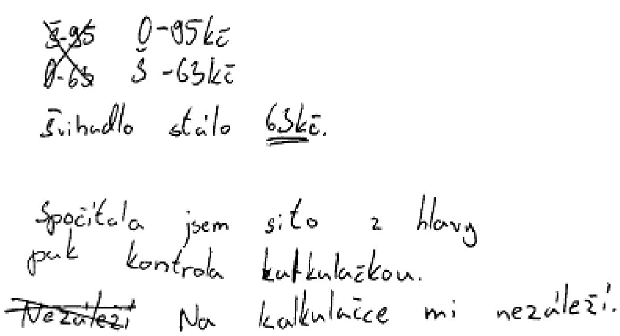
U 4 žáků se v řešení objevily 3 výpočty, tedy zbytečně počítali cenu jedné obruče, která nebyla potřebná pro vyřešení úlohy. Tři z těchto žáků pracovali po celou dobu s kalkulačkou, jedna žákyně ji použila pouze jako kontrolu správnosti svého výsledku.

Co se týče strategických chyb, u 2 žáků došlo k chybnému přiřazení kontextu, konkrétně řešili úlohu 1 896 : 12. Nepracovali s informací, že 1 896 byla cena celková, od které bylo nutno nejprve odečíst cenu za obruče. V jednom případě začal žák řešit cenu obruče a dál se nedostal. Zajímavou chybou bylo u jednoho žáka roznásobení, tedy inverzní operaci k té správné.

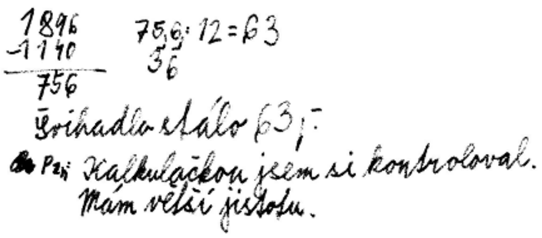
Ukázky vybraných řešení z 5. A:



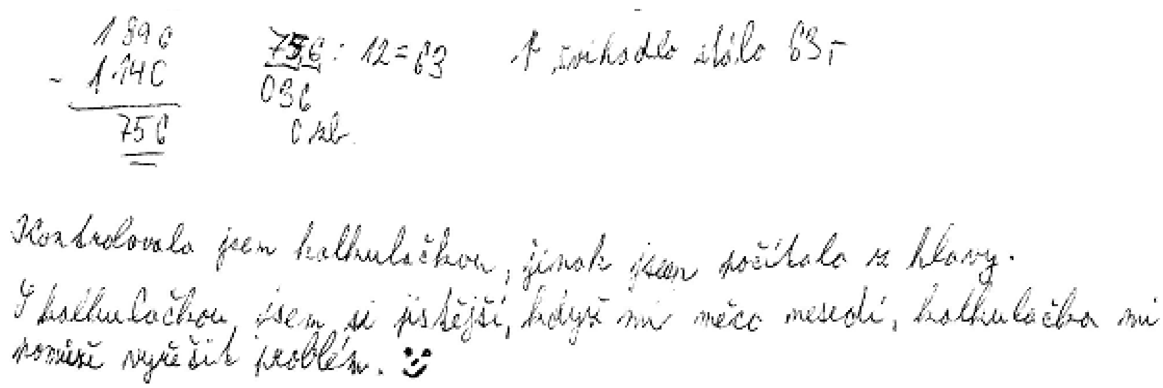
Obrázek 4.40



Obrázek 4.41



Obrázek 4.42

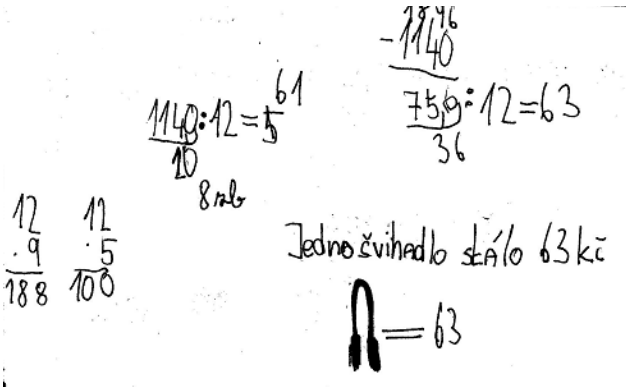


Obr. 4.43

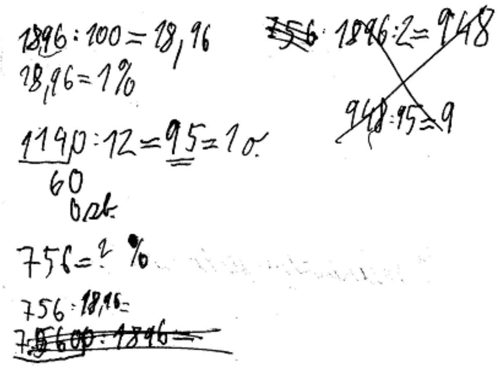
5. B

Celkem úlohu řešilo 29 žáků, všichni bez kalkulačky. Zcela správně ji vyřešilo 14 žáků (48 %), ve 4 případech (14 %) žáci řešili úlohu strategicky správně, ale udělali numerickou chybu, 11 žáků úlohu neuchopilo a zvolili špatnou strategii (38 %).

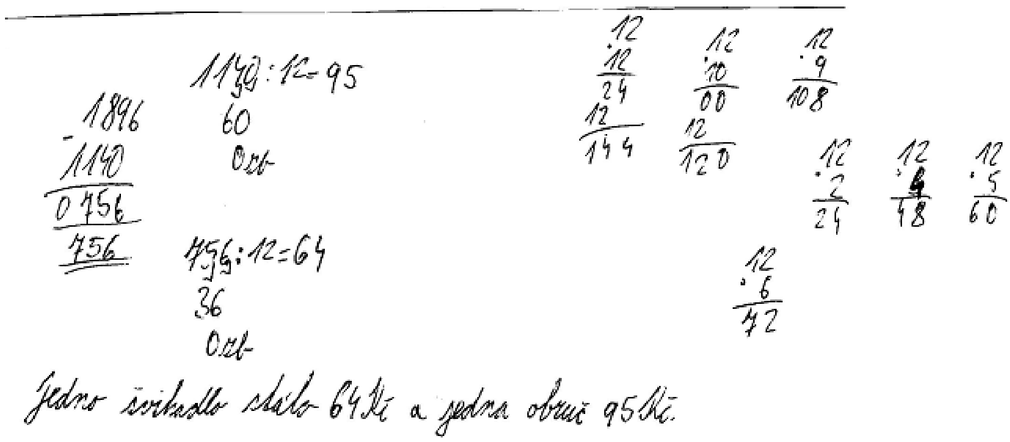
Ukázky vybraných řešení z 5. B:



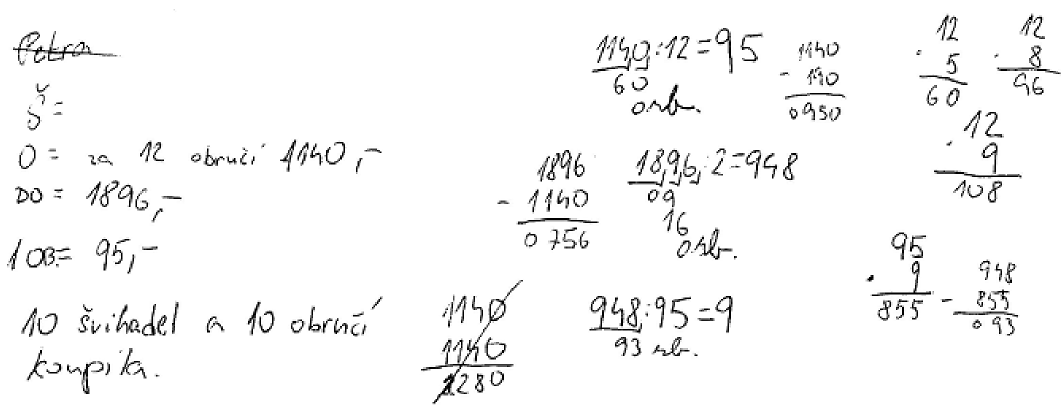
Obr. 4.44



Obr. 4.45



Obr. 4.46



Obr. 4.47

4.4.2 Závěr a reflexe E4

Jsem si vědoma možností, které tento získaný materiál nabízí. Bohužel mi již nezbyl čas, abych mohla téma kalkulaček do svého výzkumu více rozpracovat, je zde opravdu spíše velmi okrajově. Nicméně můj záměr i přesto splnil, jelikož jsem se chtěla přesvědčit o vlivu kalkulaček na řešitelskou úspěšnost a tom, jak žáci vnímají možnost pracovat s kalkulačkou.

Pokud bych měla shrnout úspěšnost mnou vytvořené úlohy 2, ve třídě 5. A ji celkem 84 % žáků vyřešilo správně (zahrnuji sem řešení správná strategicky). V 5. B byla úspěšnost dle očekávání nižší, správně úlohu vyřešilo 62 % žáků. Pro všechny tyto žáky nebyla práce s kalkulačkou něco nového a nezvyklého, využíváme je ve výuce relativně často. Potvrdila se mi má domněnka, že mnozí žáci v 5. A (má kmenová třída) díky svému sebevědomí a víře ve vlastní řešení nechali kalkulačky ležet na lavicích a nepoužili je, či je použili na ukončení řešení jako kontrolu.

Nejčastější strategická chyba vznikla ve špatném uchopení vztahu mezi objektem a veličinou, která k němu patřila.

Očekávala jsem, že většina žáků bude schopna číst zadání úlohy s porozuměním a bude se snažit úlohu vyřešit úsporně, tedy že žáci nebudou počítat cenu jedné obruče, ke které ovšem zadání navádělo. Toto mé očekávání se potvrdilo u obou tříd, což dle mého názoru nasvědčuje ve prospěch konstruktivistického vyučování. Žákům se snažím zadávat pravidelně úlohy s nadbytečnými údaji, pomáhat jim umět pracovat s textem.

Myslím si, že by kalkulačky měly patřit do výuky matematiky i na prvním stupni, jelikož umožní slabším žákům ušetřit energii na odhalení strategie řešení, zároveň jim dodají pocit klidu a zbaví je stresu z případných kalkulativních chyb., což se mi potvrdilo i v tomto experimentu.

5 Závěr

V závěrečné kapitole shrnu výsledky z jednotlivých experimentů, zamyslím se nad jejich praktickým využitím a dalšími otázkami, které mi výzkum přinesl. Znovu bych zde chtěla upozornit, že můj výzkum měl kvalitativní charakter. Nelze tedy tyto závěry zobecňovat, na to by byl nutný výrazně větší výzkumný vzorek.

5.1 Zajímavé jevy

Přestože jsem výzkum realizovala na spíše menším množství žáků, některé jevy se vyskytovaly velmi často. V tomto souhrnu se zamyslím nad jejich možnými příčinami i cestami vedoucími k jejich změně.

- **Chyba**: Chyby byly přítomny v mnoha žákovských řešeních, která jsme analyzovali, ať už se jednalo o mé žáky vedené konstruktivisticky, nebo žáky vyučované transmisivně. Některé z nich byly způsobeny nepozorností, jiné nedostatečnou energetickou výbavou žáků. Pokládáme si otázku, jak učitel chybu vnímá, jak s ní pracuje. Bere ji jako něco špatného, nebo naopak jako nutnou součást matematického zrání žáků? My považujeme chybu za prostředek vedoucí k rozvoji myšlenkových procesů. Vzájemnou diskusí o původu chyb, jejich odhalováním a napravováním se žáci rozvíjejí nejen matematicky, ale rovněž osobnostně. Za chybu se žáci nestydí, nejsou učitelem ani spolužáky zesměšňováni. Chyba je třídou vnímána jako nutná a důležitá součást procesu učení. Je důležité vnímat odlišnosti mezi chybami. V analýzách jsme ukázali, že chybám numerickým přikládáme menší váhu, než chybám vzniklým ve strategii. Numerika prezentuje nižší stupeň myšlenkové aktivity, proti tomu strategie představuje logiku a její praktické uplatnění. Neříkáme, že kalkulativní přesnost není důležitá, jen ji nepřikládáme tak zásadní váhu, jako je tomu v tradičním vyučování. S chybou souvisí další zajímavý jev, kterým je:
- **Škrtání, zmizíkování, gumování**: U žáků tradičně vedených jsme ve velkém množství pozorovali fenomén odstranění chyb. Ptáme se, v čem tkví příčina tohoto jevu. Domníváme se, že žáci mohou mít obavu ponechat chybu ve svém řešení, přestože ji škrtnou. Takováto chyba by mohla být některým učitelem vnímána jako prvek, kterým žák ukázal vlastní neschopnost bezchybného výpočtu. U tradičně vedených tříd jsme si všimli tendence „čistého“ zápisu, do kterého nepatří žádné pomocné výpočty ani chyby. Někteří učitelé

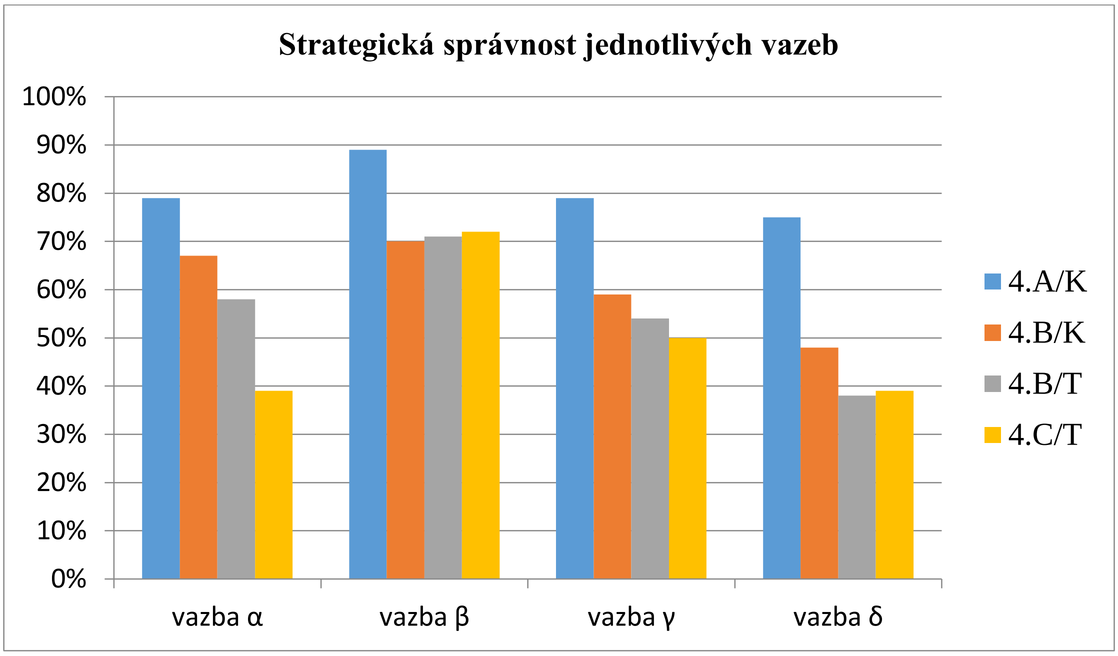
jsou přesvědčeni, že pokud žák chybu neodstraní a vizuálně ji stále vnímá, vštěpuje se mu do paměti, což může působit jako překážka do budoucna. My se přikláníme k ponechávání chyb v žákovském řešení. Díky nim se můžeme dozvědět mnoho o procesu řešení, o místě troskotání řešitele a jeho příčinách.

- **Strategie**: Námi vybraná slovní úloha představovala vícestupňové řešení. Řešitel musel odhalit 4 vazby, které jej dovedly k cíli. V našich analýzách jsme měli možnost porovnávat více přístupů. Někteří žáci úlohu uchopili již během čtení zadání, strategie vedoucí k vyřešení jim byla zcela zřejmá a jasná, což se projevilo i na podobě jejich zápisu řešení. Jiní žáci potřebovali úlohu rozčlenit na dílčí fragmenty, které řešily postupně. Zaznamenali jsme AHA efekt, kdy žák během opisování zadání zcela náhle uviděl ve své mysli hodnotu vztahující se k údajům, které právě zapsal. Někteří žáci zahájili proces řešení opisováním zadání. Je to pro ně důležitá metastrategie, která jim přináší naději, že je snad během této činnosti napadne způsob, jak úlohu řešit. U konstruktivisticky vedených žáků se projevila větší rozmanitost ve strategiích. Žáci doplňovali své výpočty komentáři, díky kterým si ujasňovali strategii, objevila se vizualizace. Pouze ve dvou případech jsme u žáků evidovali absolutní odmítnutí úlohu řešit. Častěji se objevovaly situace, kdy žák provedl zápis a následně se nevěnoval řešení, ale ilustracím. Tento jev byl hojně zastoupený ve třídě 4. B vedené tradičně u těch, kteří na řešení rezignovali. Všímali jsme si také komunikační nekompetence. Několikrát jsme narazili na řešení, kterým jsme nebyli schopni porozumět, nepodařilo se nám odhalit vznik zapsaných údajů nebo spojů.
- **Zápis**: Tradiční zápis může žákům pomoci úlohu uchopit, ovšem nemusí tomu tak být vždy. U složitějších úloh je vytvoření zápisu poměrně náročnou záležitostí, která žákům sebere jak mnoho energie, tak i času. Není nutné požadovat po žácích vypracování zápisu, pokud úlohu uchopí hned během čtení zadání. Těmto žákům povinný zápis bere motivaci a chuť do další práce, jelikož jej považují za zbytečnost.
- **Jazyk písmen**: S tradičním slovním zápisem souvisí jazyk písmen, kterým žáci označí neznámý údaj, na který se úloha ptá. V našem výzkumu se jednoznačně ukázalo, jak algebraická vyjádření abstrahují pozornost žáků, namísto přínosu porozumění. Písmena se objevovala výhradně u tradičně vedených žáků,

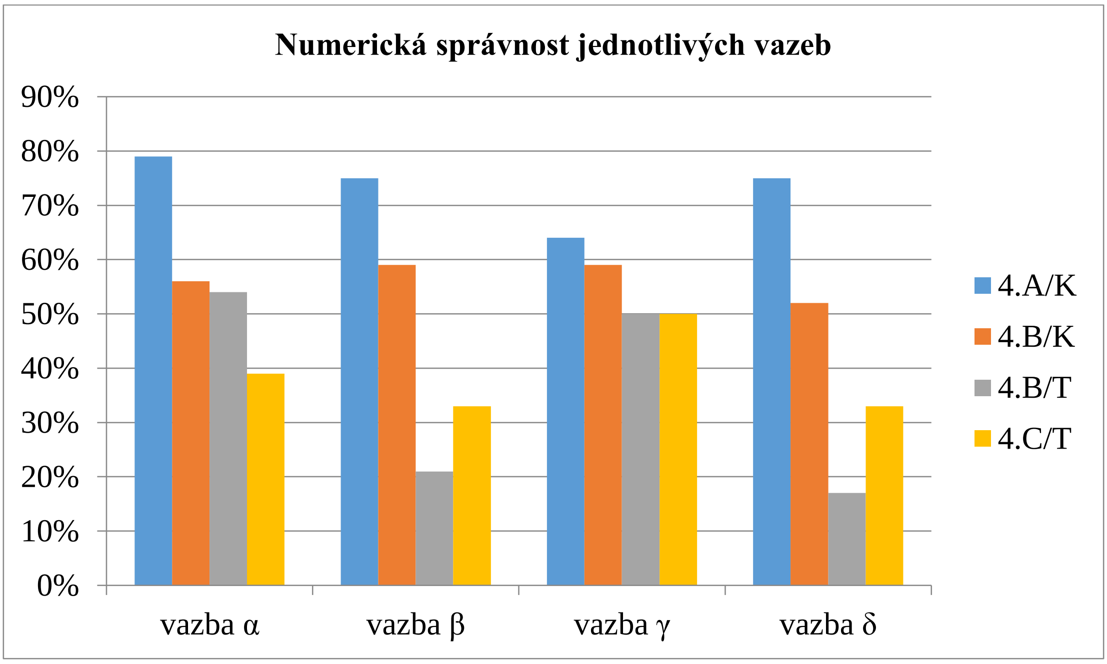
což souviselo s realizací zápisu. Ukázalo se, že žáci písmena považují za nutnou součást zápisu, následně ve výpočtech s nimi pracuje minimum z nich.

5.2 Aplikace do praxe

Podkapitolu uvedu grafy, které shrnují důležitá zjištění svědčící ve prospěch konstruktivistického vyučování.



Graf 5.1



Graf 5.2

Do grafů 5.1 a 5.2 je zanesena strategická a numerická úspěšnost žáků čtvrtých ročníků v úloze 1, která byla hlavním nástrojem našeho výzkumu. Zcela evidentní je vyšší úspěšnost třídy 4. A/K vedené konstruktivisticky oproti 4. B/K vedené stejným způsobem, a to jak ve strategii, tak v numerice. Ještě výraznější rozptyl nastává v komparaci s třídami 4. B/T a 4. C/T vedenými transmisivně. Nejvíce vyrovnaná je strategie vazby β, což je dáno formulací pomocí idiomu – tedy spojení, které žáci dobře znají díky častému výskytu v tradičních učebnicích matematiky. Pokud se u této vazby podíváme na numeriku, výsledky jsou zarážející. Naše očekávání, plynoucí z nácviku a upevňování početních spojů v podobě „sloupečků“ v tradičních třídách, hovořila pro vysokou úspěšnost v numerice u těchto žáků. Pravdou ovšem byla skutečnost, že žáci z obou konstruktivisticky vedených tříd zvládli kalkulativní řešení vazby výrazně lépe. Rovněž chyby vznikající v početní operaci této vazby (násobení dvouciferným činitelem) poukazují na nefunkčnost formálního poznání.

Výzkum ukázal, jak konstruktivistické vyučování pozitivně ovlivňuje žáky. Zjistili jsme, že pokud jsou žáci navíc vedeni tímto způsobem i v jiném předmětu než v matematice, jejich úspěšnost v tomto předmětu ještě stoupá. Učitel dává žákům výzvu, podporuje jejich otázky, vzájemné diskutování a hledání odpovědí. Jsme přesvědčeni, že toto je ta správná cesta k vytvoření sebevědomí žáků a matematické úspěšnosti.

Slovní úloha v sobě skrývá velký potenciál, který jsme se snažili nastínit v této práci. Předložili jsme možnosti, jakými lze s úlohou efektivně pracovat, jak ji může učitel diferencovat a vytvářet adekvátní úlohy pro více různých žáků. Matematickou podstatu spatřujeme u slovních úloh v odhalování strategií. Tu by měl učitel zohledňovat i ve svém hodnocení. Klasifikace by měla být tvořena dvěma parametry: zejména strategií a poté numerikou. Slabším žákům pomáhají kalkulačky. Mé vnitřní přesvědčení je následující: Žák, který si nevěří, je si vědom svých potíží s numerikou, dostává se u slovních úloh do stavu beznaděje (zejména pokud jsou pro něj úlohy příliš těžké). Kalkulačka pomůže takovému žáku zbavit se zátěže numeriky a zaměřit svou mysl na objevení strategie, což je dle mého názoru stěžejní část v procesu řešení.

Učitel by měl svým žákům předávat nejen znalosti, ale snažit se i o jejich pozitivní osobnostní rozvoj a podporu jejich sebevědomí. Na základě vlastních zkušeností vidím, že se toto daří naplňovat aplikací konstruktivistických přístupů ve výuce.

5.3 Sebereflexe

Matematika nepatřila na prvním stupni základní školy k předmětům, které by mi přinášely radost, přestože jsem patřila mezi jedničkáře. Z hodin si pamatuji zejména počítání na rychlost, závody v násobilkách, nic objevného se ve výuce nedělo. Cíl paní učitelky byl zcela jasný – všichni musí umět bezchybně a rychle počítat. Dodnes si pamatuji, s jakou radostí a pýchou jsem přinesla ve třetí třídě diplom za první místo v hudební soutěži a paní učitelka mi řekla: „To je sice hezké, ale tu násobilku bys měla víc trénovat."

Po pěti letech strávených na základní škole jsem přestoupila na osmileté gymnázium do nedalekého města. Změna to byla veliká a to nejen v oblasti požadavků na mě jako na žáka, ale i z hlediska sociálního. Upřímně mohu říci, že profesor matematiky mi celých osm let naháněl hrůzu. Hodiny s ním vypadaly velmi obdobně: test nebo zkoušení, nová látka demonstrovaná typovými úlohami s přesným postupem řešení a jeho nácvik. Všichni jsme museli tento postup respektovat a osvojit si ho, jiná cesta nepřipadala v úvahu. Neexistoval prostor pro otázky, diskuse, klima ve třídě bylo napjaté a plné obav z neúspěchu. Látce jsem v hodinách často nerozuměla a řadu postupů se musela naučit nazpaměť. Proto jsem nakonec hledala pomoc v podobě doučování, které mi pomohlo být ve vyučovacích hodinách úspěšná, přestože mi i nadále zůstávaly jisté oblasti matematiky dost vzdálené a uchopené pamětně.

Když jsem zvažovala, na jakou vysokou školu podat přihlášky, rozhodla jsem se mimo jiné také pro pedagogickou fakultu, kam jsem byla přijata. V průběhu studia na fakultě se můj vztah k matematice začal měnit. Najednou jsem viděla, jak lze matematiku učit naprosto jinak, než jak jsem ji zažila já v roli žáka, a to zejména na seminářích z didaktiky matematiky. Mnoho věcí, které mi byly v matematice dlouhá léta utajeny, se postupně začaly vynořovat, propojovat, ukazovat mi nové souvislosti. Můj vztah k matematice se zlepšil natolik, že mě přivedl až k diplomové práci na KMDM, která byla oceněna i na soutěži SVOČ.

Po ukončení fakulty jsem nastoupila v Praze do základní školy. Stala jsem se učitelkou první třídy, z čehož jsem měla obavy. Třída byla původně koncipována pro speciálního pedagoga, který ovšem nenastoupil. Bála jsem se, že nebudu umět pracovat s žáky se specifickými poruchami učení a s žáky hyperaktivními. Z fakulty jsem rovněž věděla, že by začínající učitel neměl svou pracovní dráhu začínat v první třídě, jelikož je velmi náročná zejména s ohledem na počáteční gramotnost. Těžkosti mi přinesla také nedůvěra rodičů, kteří ve mně viděli nezkušenou učitelku a obávali se, zda svou roli budu schopna zvládnout. Byl to rok, ve kterém jsem prožila mnoho hezkého, ale zároveň i těžkého. S kolegyněmi ze dvou paralelních tříd se mi příliš nedařilo najít společnou řeč. Možná to bylo způsobeno mým nasycením ideály a pozitivy z fakulty, které se najednou ocitly na styčné ploše s názory učitelek, jejichž pedagogická motivace byla po celoživotní pedagogické kariéře spíše nízká.

V závěru svého prvního pracovního roku jsem úspěšně absolvovala přijímací řízení do postgraduálního studia na KMDM, kde jsem chtěla nadále prohlubovat své znalosti z oblasti didaktiky. V průběhu doktorského studia jsem se zamýšlela nad situacemi, které se mi jako učitelce ve výuce stávaly. Byly způsobeny mou nezkušeností. Nedokázala jsem najít příčinu žákovských chyb, volila jsem nevhodné úlohy, přemýšlela nad tvorbou písemek a způsobem hodnocení, hodně jsem se snažila naučit, jak výuku správně diferencovat a uzpůsobovat ji aktuálním potřebám žáků. Snažila jsem se intenzivně pozorovat své žáky a žáky z paralelních tříd i jejich učitele. Vnímala jsem vzájemné diskuse kolegyň nad „desetiminutovkami a početními rozcvičkami“, které jsem já odmítla s žáky „vyplňovat“. Tato činnost podle mě postrádala smysl a hlavně jsem si dobře pamatovala sebe, jak jsem podobné „sloupečkové“ sešity nenáviděla. Společnou řeč nebylo možné najít. Po třech letech práce na základní škole proběhlo spojování tříd. Tři paralelní třídy o celkovém počtu 62 žáků se reorganizovaly do dvou tříd, přičemž já se stala třídní učitelkou jedné z nich a dva roky jsem měla příležitost vyučovat matematiku v obou těchto nově vzniklých třídách. A právě tehdy vznikla myšlenka tématu mé dizertace, jelikož se mi naskytla šance pracovat s žáky, kteří byli vyučováni odlišnými přístupy. Já jsem se po celou dobu snažila vést třídu konstruktivistickými přístupy, rozvíjet žákům sebevědomí a pomáhat jim zažívat v hodinách radost z vlastních nápadů, vedlejší třídy pracovaly transmisivně a zejména s velkým důrazem na standardní postupy. Nabízelo se více oblastí ke srovnávání obou tříd: geometrie, kombinatorika, práce s chybou, schopnost žáků spolupracovat,…Nakonec jsem se rozhodla pro slovní úlohy, přesněji pro řešitelské strategie žáků při řešení slovních úloh. Mým původním záměrem bylo dlouhodobé sledování řešitelských strategií u jednotlivých žáků, čímž se velmi rychle a vydatně plnila databáze materiálu. Dlouhé hodiny jsme společně se školitelem trávili nad analyzováním chyb a snažili se objevit příčiny častých jevů, které se v řešeních objevovaly. Opakovaně jsme měnili organizaci zanalyzovaného materiálu. Vzpomínám si na stavy beznaděje, kdy jsem měla dojem, že se nelze dopracovat k vyhovujícím kategoriím, jelikož se stále objevovaly nové fenomény, které bylo nutné zohlednit a které do stávající organizace nezapadaly. Byly naopak i chvíle radosti, kdy se (alespoň na několik dní) zdálo, že všechno dobře ladí.

Celý výzkum mě velmi posunul v profesní oblasti, což se pokusím shrnout v následujících bodech:

- Analýzou vlastních hodin matematiky jsem zkvalitnila svou edukační strategii. Naučila jsem se trpělivosti. Uvědomila jsem si, že čas ve vyučovací hodině mi nemůže způsobovat stres a vést mě k násilným ukončováním žákovských diskusí. Vyčkám, až žák vyjádří svůj názor, nepřerušuji jeho řeč. Žákům neradím, ale podporuji jejich vzájemnou diskusi a pomáhám ji organizovat.
- Zásadní ve vyučování je pro mne žák a jeho myšlenkový proces, jehož analýzou jsem zvýšila schopnost chápat žákovo myšlení. Mohu přesněji a vhodněji zadávat úlohy, čímž vzrostla motivace celé třídy. To svědčí o správnosti mého stylu a současně to motivuje i mne.
- Lépe jsem pochopila způsob tvorby gradovaných úloh. Nejprve nutno identifikovat gradační parametry a pak sérii úloh tvořit.
- Porozuměla jsem didaktickému potenciálu slovní úlohy. Silným přínosem pro mne byl objev, kolika způsoby lze pracovat s jedinou slovní úlohou, jak je možné vytvořit úpravou jejího textu náročnější nebo snazší modifikace, a jak lze frontálně zadanou úlohu přizpůsobovat žákům na jejich úroveň i během vyučování. S radostí jsem konstatovala úspěšnost této metody. I slabší žáci zažívali ve vyučování úspěch a byli motivováni k zapojení se do diskusí o řešeních. Po dlouhodobém a intenzivním analyzování žákovských řešení jsem začala citlivěji vnímat skutečnosti, jenž jsem si dříve jako učitelka neuvědomovala.
- V průběhu výzkumu jsem také začala více využívat v hodinách kalkulačky, které působily na žáky slabší v kalkulativních dovednostech jako opora a pomůcka dodávající větší jistotu.
- Za úspěch považuji rovněž chuť mých žáků zapojit se do různých matematických soutěží, přičemž tou poslední byla Pythagoriáda, kdy ze školního kola postoupilo 7 úspěšných řešitelů. Všechny tyto děti se v okresním kole velmi dobře umístily a jedna žákyně z mé třídy získala maximální počet bodů.
- Největší radostí pro mě je však skutečnost, že se žáci na hodiny matematiky těší, neprožívají strach z neúspěchu nebo obavy z vlastních chyb a spatřují v matematice užitečnost pro svůj praktický život. Jelikož tento osobnostní dopad má pro mne váhu zásadní, přikládám i několik závěrečných reflexí svých žáků, které mi udělaly obrovskou radost.

Pořádně jsem se zlepšila ta co jsem kdysi neuměla teď perfektně zvládám ako všechno díky paní učitelce Králové.

Je mi velmi líto že už nás nebudete mít za třídu ale strašně mě těší že Vás budeme mít aspoň na HV

Myslím, že mi matematika docela jde. Největší radost jsem měla z toho, když jsem loni konečně pochopila násobení pod sebe =). Strach jsem nikdy neměla. Někdy trochu před písemkou, ale i když někdy dopadla špatně, vždy jste nás vyzkoušela, abychom si známku opravili. Když někdo udělal nějakou chybu, snažili jsme se, mu to vysvětlit. Myslím, že hodnocení bylo uděláno dobře. Také, když jsme měli hodnotit práci ostatních, nepamatuji si, že by se někdo někomu za to posmíval. Líbilo se mi, když jsme dělali tu hru se zavázanýma očima a tvary, geoboardy a zrcátka. Řekla bych, že jsem se u Vás toho naučila hodně. Když jsme měli víc řešení úlohy, vždy jsme si všechna ukázali na tabuli. Pythagoriáda byla dobrá zkušenost, ráda jsem si něco takového zkusila.

Myslím si, že mi jde prakticky všechno, co jsme se učili, ale menší nedostatek vidím v tom, že si někdy neuvědomím, jak se dá úloha jednoduše vyřešit a místo toho složitě počítám a ztrácím tím čas. Největší radost jsem měl asi z toho, když jsem napsal „čtvrtletku" bez chyby jako jediný ze třídy. Strach jsem ani moc nemíval, ale před velkými testy jsem byl trochu nervózní. Mám dojem, že chyby jsme nebrali tak vážně, protože splete se může každý a za menší chybu v testech jsme také mohli dostat nějaký ten bod. Hodnocení bylo, myslím spravedlivé a každý se snažil ohodnotit druhé pozitivně. Jako netypickou činnost vidím

Když někdo udělal chybu u tabule tak jsme si ukázaly kde ta chyba byla a vysvětlily jsme si to. Testy byli hodnoceny spravedlivě a dobře. Taky jsme dělaly různé netypické činosti pomáhalo mi to z učením

Hodně sem se v matice posunul. Byla jste nejlepší učitelka kterou jsem na této škole poznal. Děkuju za to co ste mě naučila.

Matematika mi ~~ob~~ jde. Občas sice něčemu neporozumím, ale pak to pochopím. Největší radost jsem měla když jsem přebírala ~~dim~~diplom z Pythágoriády, který jsem získala jen díky naší skvělé paní učitelce. A poté

~~že chyby ve výuce~~ Chybám jsme se hodně věnovali a myslím si že to těm kterým to nechápali pomohlo. Hodnocení bylo podle mě spravedlivé. Líbilo se mi, že když Ukazovali jsme si spousta možností jak řešit jakoukoliv úlohu. :)

PS: Byla jste skvělá učitelka, s skvělé nápady a super výlety. Jsem moc ráda, že jsem mohla být vaše žačka.

spravedlivé. Bylo tu hodně zábavných a netypických činností. Zdálo se mi, že ste se snažila udělat hodiny pestré a zábavné. Na to, že to byla Vaše první třída jste dokázala pobrat hodně zkušeností. V matice jsem se hodně zlepšila. Z mého pohledu jste dokázala matematiku vysvět-lit a naučit. Přeji hezké prázdniny

houpala. PS. Dříve jsem se hrozně bála třeba na testy, vystoupit atd. přijmačky, pitágoriáda i škola mi pomohli se strachu zbavit. A teď se vůbec nebojím.
Jste výborná učitelka

paní učitelku mám moc ráda

Osobní poznámka:

V době, kdy jsem tuto práci dokončovala, jsem měla ošklivou autonehodu. Myslím si, že tuto sebereflexi završím krátkým popisem situace: Když jsem si uvědomila, že jsem živá, nemyslela jsem na to, jestli nemám zlámané kosti, ani na bolest. Jediné, co mi proběhlo v hlavě, bylo uvědomění si, že v zavazadlovém prostoru mého auta byl notebook s téměř celou disertací, jejíž poslední verze jsem si neměla zálohované…. Přežily jsme naštěstí obě.

6 Seznam použité literatury

BLAŽKOVÁ, Růžena, Milena VAŇUROVÁ a Květoslava MATOUŠKOVÁ.*Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002, 84 s. ISBN 80-210-3022-4.

DESCARTES, René. *Rozprava o metodě*. 3.vyd., 1.vyd.v nakl.Svoboda. Praha: Svoboda, 1992, 67 s. ISBN 80-205-0216-5.

DIVÍŠEK, J. a kol.: Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. Praha, SPN 1989.

EASTMAN, Charles M. Cognitive processes and ill-defined problems: A case study from design. In: *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence: IJCAI*. 1969. p. 669-690.

FISCHBEIN, Efraim. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Boston: D. Reidel Pub. Co., 1975. ISBN 90-277-0626-3.

FISCHBEIN, Efraim; GAZIT, Avikam. Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational studies in mathematics*, 1984, 15.1: 1-24.

FISCHBEIN, Efraim. *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Norwell, MA, U.S.A.: Sold and distributed in the U.S.A. and Canada by Kluwer Academic, c1987. ISBN 90-277-2506-3.

FISCHBEIN, Efraim. Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*. 1999, č. 38, s. 11-50.

GEARY, David C. *Children's mathematical development: research and practical applications*. 1st ed. Washington, DC: American Psychological Association, 1996, xv, 327 p. ISBN 15-579-8258-9.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 187 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8581-4.

HEJNÝ, Milan. Rozmanitost řešení žáků jako diagnostický nástroj edukačního stylu. In: *Letná škola z teorie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2005.* dostupné z http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2005/019_hejny_rozmanitost.pdf

HEJNÝ, M.; MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu.* Bratislava: Metodické centrum, 2001.

HEJNÝ, Milan a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 1999. 123 s. ISBN 80-86039-98-6.

HERGENHAHN, B. R. a Tracy B. HENLEY. *An introduction to the history of psychology*. Seventh edition. Cengage Learning, 2013, xx, 720 pages. ISBN 9781133958093.

JANÍK, T. Akční výzkum jako cesta ke zkvalitňování pedagogické praxe. In Maňák, J., Švec, V. (Eds.), *Cesty pedagogického výzkumu*. Brno: Paido, 2004, s. 51–68.

KILPATRICK, Jeremy, Jane SWAFFORD a Bradford FINDELL. *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press, c2001, xvii, 454 p. ISBN 03-090-6995-5. dostupné na http://www.sjsd.k12.mo.us/cms/lib3/MO01001773/Centricity/Domain/872/Adding%20it%20Up.pdf

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-042-3753-3.

KUŘINA, František.: O matematice a jejím vyučování. Obzory matematiky, fyziky a informatiky. 2002, roč. 31, č. 1.

KUŘINA, František. Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice. *MATEMATIKA-FYZIKA-INFORMATIKA*. 2013, roč. 22, č. 1, s. 2-16. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/1/1

KVĚTOŇ, P.: Kapitoly z didaktiky matematiky I, II. Ostrava 1982, 1986, 1990.

McNiff, J. Action Research: Principles and Practise. London: Routledge, 1988

MORGAN, C. L. *An introduction to comparative psychology*. London: W. Scott, 1894

NEZVALOVÁ, D. Akční výzkum ve škole. *Pedagogika*, roč. LIII, 2003, s. 300–307.

NEWELL, Allen; SHAW, John C.; SIMON, Herbert A. Report on a general problem-solving program. In: *IFIP Congress*. 1959. p. 256-264.

NEWELL, Allen, et al. *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1972.

NOVÁK, B.; STOPENOVÁ, A. Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ. vydání 1. Olomouc: Univerzita Palackého, 1993. 51 s.

NOVÁK, Bohumil, Jindřiška EBEROVÁ a Anna STOPENOVÁ. *Základy elementární matematiky v úlohách*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003, 97 s. ISBN 80-244-0853-8.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2000, 123 s. ISBN 80-729-0011-0.

O' DONOHUE, William T a Kyle E FERGUSON. *The psychology of B.F. Skinner*. Thousand Oaks, Calif.: Sage, c2001. ISBN 07-619-1759-4.

PIAGET, Jean. Part I: Cognitive development in children: Piaget development and learning. *Journal of research in science teaching*, 1964, 2.3: 176-186.

PIAGET, Jean. *Psychologie inteligence*. 2. vyd. Praha: Portál, 1999, 164 s. ISBN 80-717-8309-9.

PIAGET, Jean, Bärbel INHELDEROVÁ a [z francouzského originálu ... přeložila Eva VYSKOČILOVÁ]. *Psychologie dítěte*. Vyd. 5., V nakl. Portál 4. Praha: Portál, 2007. ISBN 978-807-3672-638.

PLHÁKOVÁ, Alena. *Učebnice obecné psychologie*. 1. vyd. Praha: Academia, 2004, 472 s. ISBN 80-200-1086-6.

PÓLYA, George. *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Expanded Princeton Science Library ed. Princeton [N.J.]: Princeton University Press, 1971, xxvii, 253 p. ISBN 06-911-1966-X.

PRŮCHA, J.; WALTEROVÁ, E.; MAREŠ, J. *Pedagogický slovník.* 5. Vyd. Praha, Portál 2008.

RENDL, M.; VONDROVÁ, N.; JIROTKOVÁ, D., KLOBOUČKOVÁ, J. a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Pedagogická fakulta UK, 2013.

RENDL, Miroslav. *Matematické znalosti dětí ve čtvrté třídě*. dostupné z http://userweb.pedf.cuni.cz/kpsp/psse/pdf/tridy/4/rendl.pdf

SCHOENFELD, Alan H. How we think: a theory of human decision – making, with a focus on teaching. In: *12 th International Congress on Mathematical Education* [online]. 2012 [cit. 2014-02-10]. Dostupné z: http://www.icme12.org/upload/submission/1900_F.pdf

SCHOENFELD, Alan H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In: *D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan [online]. 1992 [cit. 2014-01-10]. Dostupné z: http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/Schoenfeld_MathThinking.pdf

SCHOENFELD, Alan H. Reflections on Problem Solving Theory and Practice. In: *The Mathematics Enthusiast* [online]. 2013 [cit. 2014-01-10]. ISSN 1551-3440. Dostupné z: http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/1-Schoenfeld_pp9_34.pdf

SIMON, Herbert A.; NEWELL, Allen. Human problem solving: The state of the theory in 1970. *American Psychologist*, 1971, 26.2: 145.

SKINNER, Burrhus Frederic, et al. *Beyond freedom and dignity*. New York: Bantam Books, 1972. dostupné na http://biggyeyes.designplusph.com/files/collegefiles/intfilo/readings_2010july26/beyond_freedom_and_dignity.pdf

STERNBERG, Robert J. *Kognitivní psychologie*. Vyd. 2. Překlad František Koukolík. Praha: Portál, 2009, 636 s. ISBN 978-80-7367-638-4.

STRINGER, E. T. *Action Research: a handbook for practitioners*. Thousand Oaks, California: Sage Publications, 1996

TICHÁ, Marie. Jak žáci chápou slovní úlohy se zlomky. In: *6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol* [online]. 1998 [cit. 2014-02-26]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_55.pdf

THORNDIKE, R. L. *The measurement of inteligence: Present status.* Psychological Review 31, 1924, 219-52.

VÁGNEROVÁ, Marie. *Kognitivní a sociální psychologie žáka základní školy*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2001, 304 s. ISBN 80-246-0181-8.

WHITHEAD, J. *The growth of educational knowledge*. Bournemouth: Hyde Publications, 1993

Seznam příloh

Přílohy.docx